Sujet — Cachan, deuxième épreuve, 1990

Soit k un corps commutatif. On note $k[X]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients dans k.

Soit n un entier $\geqslant 2$. On note $\mathcal{M}_n(k)$ l'algèbre des matrices (n,n) à coefficients dans k, $\mathcal{GL}_n(k)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(k)$ formé par les matrices inversibles, I_n la matrice identité. Si $M \in \mathcal{M}_n(k)$, on note ${}^tM$ sa transposée.

Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ dans k^n et soit $C = (c_{i,j})$ la matrice (n,n) définie par :

$$\begin{cases} c_{i,j} \text{ si } 1 \leqslant j \leqslant n-1 \text{ et } i = j+1, \\ c_{i,j} = a_j \text{ si } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } j = n, \\ c_{i,j} = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette matrice est étudiée dans les trois parties du problème.

Partie I

1. Calculer le polynôme caractéristique de C.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de k^n. Déterminer l'expression de $C^i(e_1)$ sur cette base, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

   En déduire que $\{I_n, C, \ldots, C^{n-1}\}$ est une partie libre de $\mathcal{M}_n(k)$.

   Montrer que tout polynôme P de $k[X]$, tel que $P(C) = 0$, est divisible par le polynôme caractéristique de C.
3. Soit $\sigma = (s_1, \ldots, s_n)$ dans k^n ; on considère la matrice $S_\sigma = s_{i,j}$ définie par :

$$\begin{cases} s_{i,j} = s_{i+j-n} \text{ si } i+j > n, \\ s_{i,j} = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que S_σ est une matrice symétrique.

   Calculer son déterminant.
4. Montrer qu'il existe un unique $\sigma = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ dans k^n tel que $s_1 = 1$ et tel que la matrice $S_\sigma C$ est symétrique.
5. En déduire qu'il existe une matrice symétrique inversible T et une matrice symétrique R telles que $C = TR$.
6. Montrer qu'il existe une matrice symétrique inversible T telle que $C = T\,{}^tCT^{-1}$.
7. Calculer la matrice S_σ dans le cas où

$$a_n = 2, a_{n-1} = -1 \text{ et } a_i = 0,\ \forall i \leqslant n-2.$$

Partie II

Dans cette partie, on suppose que k est un corps de caractéristique différente de 2 et tel que :

$$\forall a \in k, \exists b \in k \mid a = b^2.$$

1. Soit B une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de k^n.
   Montrer qu'il existe x dans k^n tel que $B(x,x) = 1$.
2. Soit $M \in \mathcal{GL}_n(k)$. Montrer l'équivalence des assertions :
   a) La matrice M est symétrique ;
   b) $\exists P \in \mathcal{GL}_n(k) \mid M = {}^tPP$.
3. Montrer que C est semblable à une matrice symétrique.
4. Montrer que dans $M_n(k)$ les matrices symétriques ne sont pas en général diagonalisables. Donner un exemple de matrice symétrique non diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(k)$ lorsque k est le corps des nombres complexes.

Partie III

Dans cette partie, on suppose que $k = \mathbb{R}$ le corps des réels. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, de la topologie produit.

1. Soit Ω le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices M qui vérifient la propriété suivante :
   Si P est un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(M) = 0$, alors P est divisible par le polynôme caractéristique de M. Montrer que Ω est un ouvert.
2. Soit λ une valeur propre de C. Montrer que :
$$|\lambda| \leqslant \max\{1 + |a_i|; i \in \{1, \ldots, n\}.$$
3. Soit $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que
   — M_i est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout i dans $\mathbb{N}$;
   — la suite $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers C.
   Montrer que :
   a) $\exists l \in \mathbb{N} \mid \forall m \geqslant l$, $\mathcal{M}_m$ a n valeurs propres distinctes deux à deux.
   b) $\exists K \in \mathbb{R}^+ \mid \forall m \in \mathbb{N}$, $\forall\lambda$ valeur propre de $\mathcal{M}_m$, on a : $|\lambda| \leqslant K$.
   c) Soit $m \geqslant l$. On note $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$ les n valeurs propres de $\mathcal{M}_m$ rangées dans l'ordre croissant.
   Montrer que la suite $\{\lambda_i^m\}_{m\geqslant l}$ converge, pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$ et que le polynômes caractéristique de C admet ses n racines dans $\mathbb{R}$.
4. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas la limite d'une suite de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition de solution

Partie I

1. *Méthode 1*

   Posons $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} X^k$.

   Par définition,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ & & & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

   Donc

$$\chi_C(X) = \det(XI_n - C) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ -1 & X & & & \vdots \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & X & -a_{n-1} \\ & & & -1 & X - a_n \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{k=1}^{n-1} X^k L_{k+1}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & X & & & \vdots \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & X & -a_{n-1} \\ & & & -1 & X - a_n \end{vmatrix}.$$

   En développant par rapport à la première ligne,

$$\chi_C = (-1)^{n+1}(-1)^{n-1}P(X) = P(X).$$

$$\boxed{\chi_C = -a_1 - a_2 X - \cdots - a_n X^{n-1} + X^n.}$$

   Méthode 2

   On développe par rapport à la dernière colonne.

2. Remarquons que

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ C(e_k) = e_{k+1}, \text{et } C(e_n) = a_n e_n.$$

   Donc par récurrence immédiate, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $C^i(e_1) = e_{i+1}$.

   Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 I_n + \lambda_2 C + \cdots + \lambda_n C^{n-1} = 0$. Alors, en particulier,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 C^2(e_1) + \cdots + \lambda_n C^{n-1}(e_1) = 0,$$

   i.e.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0.$$

Or, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base.

Donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

$\boxed{\text{Donc } (I_n, C, \dots, C^{n-1}) \text{ est une famille libre de } \mathcal{M}_n(k).}$

Soit $P \in k[X]$ tel que $P(C) = 0$. Notons m son degré. Si $m \leqslant n-1$, $P(C)$ est une combinaison linéaire nulle d'une sous famille de $(I_n, C, \dots, C^{n-1})$ qui est une partie libre de $\mathcal{M}_n(k)$., Donc P est nul. Si $\deg(P) \geqslant n$, effectuons la division euclidienne de P par χ_C dans $k[X]$: il existe $Q, R \in k[X]$ tels que $P = \chi_C Q + R$, où $\deg(R) \leqslant n-1$ Or, par le théorème de Cayley Hamilton, $\chi_C(C) = 0$. Donc $R(C) = 0$. Donc, d'après le premier cas $R = 0$, et $P = \chi_C Q$.

$\boxed{\text{Ainsi, tout polynôme } P \text{ tel que } P(C) = 0 \text{ est divisible par } \chi_C.}$

3. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$s_{j,i} = \begin{cases} s_{j+i-n} \text{ si } j+i > n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} = s_{i,j}.$$

$\boxed{\text{Donc } S_\sigma \text{ est une matrice symétrique.}}$

Par définition,

$$\det(S_\sigma) = \sum_{\tau \in \S_n} \prod_{i=1}^{n} [S_\sigma]_{i,\tau(i)}.$$

Or, pour tout $\tau \in \mathcal{S}_n$, s'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $i + \tau(i) \leqslant n$, alors $\prod_{i=1}^{n} [S_\sigma]_{i,\tau(i)} = 0$.

Soit $\tau \in \mathcal{S}$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $i + \tau(i) > n$. Alors $\tau(1) > n-1$, donc $\tau(1) = n$. Par suite, comme $\tau(2) \neq \tau(n)$, et $\tau(2) > n-2$, nécessairement, $\tau(2) = n-1$. Par récurrence finie immédiate, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\tau_i = n - i + 1$.

$\boxed{\text{Donc } \det(S_\sigma) = \prod_{i=1}^{n} s_1 = s_1^n.}$

4. Soit $\sigma = (s_1, \dots, s_n)$ dans k^n tel que $s_1 = 1$ et tel que la matrice $S_\sigma C$ est symétrique. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned} [S_\sigma C]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} [S_\sigma]_{i,k} [C]_{k,i} \\ &= \begin{cases} [S_\sigma]_{i,j+1} \text{ si } j \neq n, \\ \sum_{k=n-i+1}^{n} [S_\sigma]_{i,k} a_k \text{ si } i+j \geqslant n \end{cases} \\ &= \begin{cases} s_{i+j+1-n} \text{ si } i+j \geqslant n \text{ et } j \neq n, \\ \sum_{k=n-i+1}^{n} s_{i+k-n} a_k \text{ si } j = n, \\ 0 \text{ si } i+j < n. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, $[S_\sigma C]_{i,j} = [S_\sigma C]_{j,i}$.

Pour $j = n$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$[S_\sigma C]_{i,n} = \sum_{k=n-i+1}^{n} s_{i+k-n} a_k.$$

Et

$$[S_\sigma C]_{n,i} = s_{1+i}.$$

Donc

$$s_{1+i} = \sum_{k=n-i+1}^{n} s_{i+k-n} a_k.$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, s_i s'exprime en fonction de $(s_1, \dots, s_{i-1})$, donc par récurrence immédiate, tous les s_i s'expriment en fonction de s_1.

Réciproquement, on vérifie que σ défini précédemment convient.

Ainsi, il existe un unique $\sigma = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ dans k^n tel que $s_1 = 1$ et tel que la matrice $S_\sigma C$ est symétrique.

5. D'après la question précédente, $S_\sigma C$ est symétrique. Comme $s_1 = 1 \neq 0$, S_σ est inversible. Or $C = S_\sigma^{-1}(S_\sigma C)$. En posant $T = S_\sigma^{-1}$, et $R = S_\sigma C$, T est une matrice symétrique inversible, et R une matrice symétrique.

   Ainsi, il existe une matrice symétrique inversible T et une matrice symétrique R telles que $C = TR$.

6. On a $T{}^tCT^{-1} = T({}^tR{}^tT)T^{-1} = TRTT^{-1} = TR = C$.

   Ainsi, il existe une matrice symétrique inversible T telle que $T{}^tCT^{-1}$.

7. $s_1 = 1$, $s_2 = s_1 a_n = 2$, $s_3 = s_2 a_n + s_1 a_{n-1} = 4 - 1 = 3$,...

   Montrons par récurrence sur $i \in [\![1, n]\!]$ que :

$$s_i = i. \qquad (\mathcal{H}_n)$$

— $i = 1$: $s_1 = 1$ par définition de σ.

— Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\mathcal{H}_n$ soit vraie. On a

$$s_{i+1} = s_i a_n + s_{i-1} a_{n-1} = 2i - (i-1) = i + 1.$$

Partie II

1. Soit B une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Elle admet une base orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$. Comme B est non dégénérée, $\det B \neq 0$, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $B(e_i, e_i) = \lambda_i \neq 0$. Par définition de k, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\mu_i \in k$ tel que $\lambda_i = \mu_i^2$. Donc $\frac{1}{\mu_i^2} B(e_i, e_i) = 1$. Par bilinéarité de B, $B(\frac{e_i}{\mu_i}, \frac{e_i}{\mu_i}) = 1$.

   Ainsi, il existe $x \in k^n$ tel que $B(x, x) = 1$, et dans la base $(\frac{e_1}{\mu_1}, \dots, \frac{e_n}{\mu_n})$, B a pour matrice I_n.

2. Soit $M \in \mathcal{GL}(k)$. L'implication réciproque est immédiate. Supposons que M est symétrique. Comme, M est inversible, il existe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B qui a pour matrice M dans la base canonique. D'après la question précédente, il existe une base orthogonale dans laquelle B a pour matrice I_n. Autrement dit, il existe $P \in \mathcal{GL}(k)$ tel que $M = {}^tPP$.

3. D'après la question I.5., il existe une matrice symétrique inversible T et une matrice symétrique R telles que $C = TR$. D'après la question précédente, $T = {}^tPP$. Donc

$$C = {}^tPPR = {}^tP(PR{}^tP)({}^tP)^{-1}.$$

Donc C est semblable à $PR{}^tP$ qui est symétrique puisque R l'est.

$\boxed{\text{Ainsi, } C \text{ est semblable à une matrice symétrique.}}$

4. Considérons la matrice C avec $a_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Alors C a pour polynôme caractéristique X_n, dont la seule racine est 0. Or, C est non nulle, donc C n'est pas diagonalisable. De plus C est semblable à une matrice symétrique. Donc cette matrice symétrique n'est pas diagonalisable.

Partie III

1. Il s'agit de montrer que l'ensemble des matrices telles que leur polynôme minimal est égal à leur polynôme caractéristique est un ouvert.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
— si P annule M, alors χ_M divise P
— il existe $x \in k^n$ tel que $(x, Mx, ..., M^{n-1}x)$ est libre
Considérons les morphismes d'algèbres suivants :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ P & \longmapsto & P(M) \end{array}$$

et pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ P & \longmapsto & P(M)(x) \end{array}.$$

Notons μ le générateur unitaire du noyau de ϕ, et μ_x celui du noyau de ϕ_x.
Soient $\mu = P_1^{\alpha_1} \cdots P_r^{\alpha_r}$ la décomposition de μ en facteurs irréductibles et $E_i = \ker(P_i^{\alpha_i}(M))$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $x_i \in E_i$ tel que $P_i^{\alpha_i - 1}(M)(x_i) \neq 0$. Comme $P_i^{\alpha_i}$ est irréductible, $\mu_{x_i} = P_i^{\alpha_i}$.
Posons $x = x_1 + \cdots + x_r$.

$$\mu_x(M)(x) = \mu_x(M)(x_1) + \cdots + \mu_x(M)(x_r)$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mu_x(M)(x_i) \in E_i$. Comme les E_i sont en somme directe, $\mu_x(M)(x_i) = 0$, pour tout i.
Ainsi, $\mu_{x_i} | \mu_x$. Et comme $\mu_x | \mu_x$, $\mu_x = \mu$ (car les deux polynômes sont unitaires).
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mu_x = \mu$.
En considérant le morphisme $\psi_{M,x} = \phi_x \circ \phi$, on a, par le théorème d'isomorphisme, $\mathbb{R}[X]/(\mu_x) \simeq E_x$, où $E_x = \mathrm{Vect}(x, Mx, \ldots M^{n-1}x)$.

Or $\deg(\mu_x) = \deg(\mu)$.

Donc $\chi_M = \mu$ si, et seulement si $\mu_x = \chi$, *i.e.* $\deg(\mu_x) = n$, soit $\dim(E_x) = n$, autrement dit, $(x, Mx, \ldots, M^{n-1}x)$ est base de son propre Vect.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(x, Mx, \ldots, M^{n-1}x)$ est une famille libre.

Considérons l'application $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \det(x, Ax, \ldots, A^{n-1}x) \end{array}$. Par définition de x, $u(M) \neq 0$. Comme u est continue, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de M tel que u soit non nulle sur $\mathcal{W}$. Donc d'après la propriété énoncée au début, $\chi_A = \mu_A$ pour toute matrice $A \in \mathcal{W}$.

Ainsi, Ω est un ouvert.

2. Soit λ une valeur propre de C. Alors, il existe un vecteur propre $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tel que $Cx = \lambda x$.

   Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_j = \lambda x_i.$$

   Donc

$$\lambda x_i = (\lambda - \alpha_{i,i}) x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_{i,j} x_j.$$

   Donc

$$|\lambda||x_i| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |c_{i,j}||x_j| \leqslant \|x\|_\infty \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |c_{i,j}| \leqslant \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}| = 1 + |a_i| \leqslant \|x\|_\infty \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (1 + a_k).$$

   Donc

$$|\lambda|\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (1 + |a_i|).$$

   Comme $x \neq 0$, $|\lambda| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(1 + |a_i|)$.

   Ainsi, si λ est une valeur propre de C, alors $|\lambda| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(1 + |a_i|)$.

3. a) Comme on est en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Nous utiliserons dans la suite la norme infinie.

   Comme Ω est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(C, \varepsilon) \subset \Omega$. Comme $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers C, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geqslant \ell$, $\|C - M_m\| < \varepsilon$.

   Soit $m \geqslant \ell$. Comme M_m est diagonalisable et son polynôme caractéristique est égal à son polynôme minimal, nécessairement, ses valeurs propres sont distinctes deux à deux.

   Ainsi, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geqslant \ell$, M_m a n valeurs propres distinctes deux à deux.

b) Soient $\varepsilon > 0$ et ℓ définis comme dans la question précédente. Posons $K_1 = \max_{\substack{1 \leqslant n \\ m \leqslant \ell}} |\lambda_i^m|$ et $K_2 = \varepsilon + \|C\|$.
Pour tout $m \leqslant \ell$, pour tout λ valeur propre de M_m, il est clair que $|\lambda| \leqslant K_1$.
Pour tout $m > \ell$,
$$|\lambda| \leqslant \|M_m\| \leqslant \|M_m - C\| + \|C\| \leqslant \varepsilon + \|C\|.$$

Donc, en posant $K = \max(K_1, K_2)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour toute valeur propre λ de M_m, $|\lambda| \leqslant K$.

c) Le polynôme caractéristique étant à coefficients qui sont fonction continue des coefficients de la matrice, et comme (M_m) converge vers C, la suite de polynômes caractéristiques (χ_{M_m}) converge vers χ_C. Donc les suites $(\lambda_i^m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergent vers les racines de χ_C qui sont nécessairement dans $\mathbb{R}$.

4. Considérons la matrice C avec $a_1 = 1$ et $a_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$. C n'est pas limite d'une suite de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car toutes ses racines ne sont pas dans $\mathbb{R}$.