Sujet — Cachan 1987, Première épreuve

Dans tout le problème, le mot *fonction* est mis pour *fonction continue* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par q une fonction fixée vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ q(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \exists x \in \mathbb{R},\ q(x) \neq 0.$$

Pour toute fonction f, on désigne par (E_f) l'équation différentielle

$$y'' - qy = f$$

et par $\mathcal{E}_f$ l'ensemble des fonctions qui sont solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_f). On désigne de même par (E) l'équation

$$y'' - qy = 0$$

et par $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses solutions sur $\mathbb{R}$. On note φ (resp. ψ) l'élément de $\mathcal{E}$ vérifiant $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$ (resp. $\psi(0) = 0$ et $\psi'(0) = 1$). Enfin, pour ℓ dans $\mathbb{R}$, on note y_ℓ l'élément de $\mathcal{E}$ vérifiant $y_l(0) = 1$ et $y_\ell'(0) = \ell$.

Partie I

1. a) Montrer que, si y appartient à $\mathcal{E}$, y^2 est une fonction convexe. Que peut-on dire de la restriction d'une fonction y de $\mathcal{E}$ à un intervalle de $\mathbb{R}$ si y garde un signe constant sur cet intervalle ?

   b) Démontrer que le seul élément de $\mathcal{E}$ qui soit une fonction bornée est la fonction identiquement nulle.

2. a) Démontrer $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \geqslant 1$.

   b) Démontrer

   $$\forall x \geqslant 0,\ \psi(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall x \leqslant 0,\ \psi(x) \leqslant 0,$$

   puis

   $$\forall x \geqslant 0,\ \psi(x) \geqslant x \quad \text{et} \quad \forall x \leqslant 0,\ \psi(x) \leqslant x.$$

   c) Montrer que $\frac{\varphi}{\psi}$ est strictement décroissant sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

3. On pose $\lambda = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

   a) Montrer $\forall x \in \mathbb{R},\ y_\lambda(x) > 0$.

   b) Montrer

   $$\forall x_0 > 0,\ \forall x \in [0, x_0],\ \varphi'(x) \leqslant \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\psi'(x)$$

   (on pourra introduire la fonction $\varphi - \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\psi$).

   c) En déduire $\forall x \in \mathbb{R},\ y_\lambda'(x) \leqslant 0$.

4. Montrer de façon analogue qu'il existe un réel μ tel que

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ y_\mu(x) > 0 \quad \text{et} \quad y_\mu'(x) \geqslant 0.$$

   Démontrer que μ est strictement plus grand que λ.

5. Exprimer y_μ en fonction de y_λ, λ et μ (on pourra poser $y_\mu = Cy_\lambda$ et déterminer la fonction C). En déduire
$$\forall x \geqslant 0,\ y_\mu(x)y_\lambda(x) \leqslant 1 + (\mu - \lambda)x.$$

6. Montrer
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_\mu(x)y_\lambda(x) \leqslant 1 + (\mu - \lambda)|x|.$$

Partie II

On considère une fonction f.

1. Montrer que, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente, la fonction
$$h(x) = \frac{1}{\lambda - \mu}\left[y_\lambda(x)\int_{-\infty}^{x} y_\mu(t)f(t)\,\mathrm{d}t + y_\mu(x)\int_{x}^{+\infty} y_\lambda(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$
est bien définie et appartient à $\mathcal{E}_f$.
2. Montrer que, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente, la fonction h précédente est une fonction bornée.
3. En déduire que, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente, (E_f) admet une et une seule solution bornée.

Partie III

On suppose, dans cette partie, que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|q(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

1. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} x\int_x^{+\infty} q(t)\,\mathrm{d}t = 0$ puis démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\left[\int_x^{+\infty} q(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$ est convergente.
2. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, bornée sur $[0, +\infty[$ et vérifiant
$$\forall x \geqslant 0,\ y''(x) - q(x)y(x) \geqslant 0.$$
   a) Montrer
$$\forall x \geqslant 0,\ y'(x) + \int_x^{+\infty} q(t)y(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0.$$
   b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x[y''(x) - q(x)y(x)]\,\mathrm{d}x$ est convergente.
3. Soit f une fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$ et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge. Montrer que l'équation (E_f) n'admet pas de solution bornée.

Partie IV

On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ q(x) = 1$. Donner l'exemple de deux fonctions f_1 et f_2 vérifiant les mêmes conditions que la fonction f de III.3.. telles que (E_{f_1}) admette une solution bornée et (E_{f_2}) n'admette pas de solution bornée.

Proposition de solution

Partie I

1. a) Soit $y \in \mathcal{E}$. Alors $y'' = qy$ et
$$(y^2)' = 2yy'$$
donc
$$(y^2)'' = 2(y'^2 + yy'') = 2(y'^2 + qy^2) \geqslant 0$$
puisque $q \geqslant 0$.

Donc y^2 est convexe.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que y garde un signe constant sur I. Alors $y'' = qy$ est de signe constant sur I.

Ainsi, si $y \geqslant 0$ sur I, alors y y est convexe. Sinon, elle y est concave.

b) Soit $y \in \mathcal{E}$ une fonction bornée. D'après la question précédente, y^2 est convexe. Donc y^2 est constante.
En effet, si par l'absurde, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $y^2(a) \neq y^2(b)$ (par exemple $y^2(a) < y^2(b)$), alors par inégalité des pentes,
$$\forall x > a,\ \frac{y^2(b) - y^2(a)}{b - a} \leqslant \frac{y^2(x) - y^2(b)}{x - b},$$
i.e.
$$\forall x > a,\ (x - b)\frac{y^2(b) - y^2(a)}{b - a} + y^2(b) \leqslant y^2(x).$$
Par passage à la limite, $\lim_{x \to +\infty} y^2(x) = +\infty$, ce qui est absurde puisque y^2 est bornée.
Donc y^2 est constante, et par continuité de y, y est constante. Comme y est constante, $qy = y'' = 0$, et comme q n'est pas identiquement nulle, nécessairement, $y = 0$.

Ainsi, le seul élément de $\mathcal{E}$ qui soit borné est la fonction identiquement nulle.

2. a) Comme $\varphi \in \mathcal{E}$, d'après I.1.a)), φ^2 est convexe. Donc $(\varphi^2)'$ est croissante. Or $(\varphi^2)'(0) = 2\varphi(0)\varphi'(0) = 0$, on en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(\varphi^2)'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de φ^2		$\searrow$	$\varphi^2(0) = 1$	$\nearrow$	

Donc
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi^2(x)| \geqslant 1.$$
Par continuité de φ,
$$\varphi \geqslant 1 \quad \text{ou} \quad \varphi \leqslant -1.$$
Or, $\varphi(0) = 1$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \geqslant 1$.

b) De façon analogue, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(\psi^2)'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de ψ^2		$\searrow$	$\psi^2(0) = 0$	$\nearrow$	

ψ^2 est monotone sur $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0]$.

Montrons que ψ est croissante sur $]0, +\infty[$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $0 < a < b$ tels que $\psi(a) > \psi(b)$. Comme ψ^2 est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\psi^2(a) \leqslant \psi^2(b)$. Donc $\psi(b) < 0 < \psi(a)$. Par continuité de ψ, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\psi(c) = 0$. Or pour tout $x \in [a, b]$, $(\psi^2)'(x) = 2\psi(x)\psi'(x) \geqslant 0$. Donc ψ et ψ' sont de même signe sur $[a, b]$. Donc ψ' est positive sur $[a, c]$, et donc ψ est croissante sur $[a, c]$ ce qui est contradictoire puisque $\psi(a) > 0$. Par croissance de ψ sur $\mathbb{R}_+$, $\forall x \geqslant 0,\ \psi(x) \geqslant \psi(0) = 0$.

On montre de façon analogue que ψ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Par décroissance de ψ sur $\mathbb{R}_-$, $\forall x \leqslant 0,\ \psi(x) \leqslant \psi(0) = 0$.

Ainsi, $\forall x \geqslant 0,\ \psi(x) \geqslant 0$ et $\forall x \leqslant 0$, $\psi(x) \leqslant 0$.

D'après I.1.a)) et ce qui précède, ψ est convexe sur $[0, +\infty[$ et concave sur $]-\infty, 0]$. Donc ψ' est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$, et par théorème des accroissements finis, on a

$$\forall x \geqslant 0,\ \exists c \geqslant 0,\ \psi(x) - \psi(0) = \psi(x) = x\psi'(0) \geqslant x\psi'(0)$$

et

$$\forall x \leqslant 0,\ \exists c \leqslant 0,\ \psi(x) - \psi(0) = \psi(x) \leqslant x\psi'(0).$$

Ainsi, $\forall x \geqslant 0,\ \psi(x) \geqslant x$ et $\forall x \leqslant 0,\ \psi(x) \leqslant x$.

c) $\frac{\varphi}{\psi}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, domaine sur lequel elle est dérivable, par quotient de telles fonctions, et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'(x) = \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)}.$$

Notons $h = \varphi'\psi - \varphi\psi'$ qui est dérivable, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = \varphi''(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi''(x) = q(x)(\varphi(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi(x)) = 0.$$

Donc h est constante égale à $h(0) = -1$. Donc $\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'$ est strictement négative sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, $\frac{\varphi}{\psi}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

3. a) (φ, ψ) est clairement libre.
   Donc $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(\varphi, \psi)$. Or $y_\lambda(0) = 1$ et $y'_\lambda(0) = 0$. Donc $y_\lambda = \varphi + \lambda\psi$.
   D'après I.2.c)), $-\frac{\varphi}{\psi}$ est une fonction strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
   Donc pour tout $x \geqslant 0,\ \lambda > -\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, *i.e.* $\forall x \geqslant 0,\ y_\lambda(x) > 0$ puisque

$$\forall x \geqslant 0,\ \psi(x) \geqslant 0,$$

   et

$$\forall x < 0,\ \psi(x) < 0,$$

   et $\varphi(x) > 0$.
   Donc $\forall x < 0,\ \lambda < -\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, et

$$\forall x < 0,\ y_\lambda(x) > 0.$$

   $\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R},\ y_\lambda(x) > 0.}$

   b) Soit $x_0 > 0$. Notons $f_{x_0} = \varphi - \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\psi \in \mathcal{E}$. Comme $-\frac{\varphi}{\psi}$ est croissante sur $]0, x_0]$, f_{x_0} y est positive, donc par I.1.a)), f_{x_0} y est convexe, et f'_{x_0} y est croissante, donc

$$\forall x \in [0, x_0],\ f'_{x_0}(0) \leqslant f'_{x_0}(x),$$

   i.e.

$$\forall x \in [0, x_0],\ \varphi'(x) \leqslant \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\psi'(x).$$

   $\boxed{\text{Ainsi, } \forall x_0 > 0,\ \forall x \in [0, x_0],\ \varphi'(x) \leqslant \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\psi'(x).}$

   c) Comme $y_\lambda > 0$, y'_λ est croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, par question précédente, en faisant tendre x_0 vers l'infini, on a

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ \varphi'(x) + \lambda\psi'(x) \leqslant 0.$$

   $\boxed{\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R},\ y'_\lambda(x) \leqslant 0.}$

4. Posons $\mu = -\lim_{x \to -\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Une démonstration analogue à I.3.a))-I.3.b)) permet de montrer que $y_\mu > 0$ et $y'_\mu \geqslant 0$.
   On a alors $\lambda \leqslant 0 \leqslant \mu$. Si $\lambda = \mu = 0$, alors $y_\lambda = \varphi = y_\mu$, mais y_λ est décroissante et y_μ est croissante, donc φ est constante égale à 1 ce qui est contradictoire puisque q n'est pas identiquement nulle.
   Donc $\lambda < 0 < \mu$.
   Soit C une fonction telle que $y_\mu = Cy_\lambda$. Alors

$$y''_\mu = C''y_\lambda + 2C'y'_\lambda + Cy''_\lambda = qCy_\lambda.$$

   i.e.

$$C'' + 2\frac{y'_\lambda}{y_\lambda}C' = 0$$

car $y_\lambda > 0$. Donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $C' = \frac{A}{y_\lambda^2}$.
Or,

$$\begin{cases} y_\mu(0) = C(0) = 1 \\ y'_\mu(0) = C'(0) + C(0)\lambda = \mu, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} C(0) = 1 \\ C'(0) = \mu - \lambda. \end{cases}$$

Donc $C'(0) = A = \mu - \lambda$, et $C' = \frac{\mu-\lambda}{y_\lambda^2}$. Donc il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ C(x) = (\mu - \lambda) \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{y_\lambda^2(t)} + B.$$

Or $C(0) = 1$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ C(x) = (\mu - \lambda) \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{y_\lambda^2(t)} + 1$.
Considérons $g(x) = C(x)y_\lambda(x)$. g est clairement $\mathcal{C}^2$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g''(x) &= C''(x)y_\lambda(x) + 2C'(x)y'_\lambda(x) + C(x)y''_\lambda(x) \\ &= -2(\mu - \lambda)\frac{y'_\lambda(x)}{y_\lambda^2(x)} + 2(\mu - \lambda)\frac{y'_\lambda(x)}{y_\lambda^2(x)} + \big[(\mu - \lambda) \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{y_\lambda^2(t)} + 1\big] y''_\lambda(x) \\ &= \big[(\mu - \lambda) \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{y_\lambda^2(t)} + 1\big] q(x)y_\lambda(x) \\ &= q(x)g(x). \end{aligned}$$

Donc $g \in \mathcal{E}$ De plus, $g(0) = C(0)y_\lambda(0) = 1$ et $g'(0) = (\mu - \lambda) + \lambda = \mu$.
Par unicité du problème de Cauchy, $y_\mu = g$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ y_\mu(x) = \big[(\mu - \lambda) \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{y_\lambda^2(t)} + 1\big] y_\lambda(x)$.

5. D'après la question précédente,

$$\forall x \geqslant 0,\ y_\lambda(x)y_\mu(x) \leqslant \big[(\mu - \lambda) \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{y_\lambda^2(t)} + 1\big] y_\lambda^2(x).$$

Or, $y'_\lambda \leqslant 0$. Donc y_λ^2 est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{y_\lambda^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc

$$\begin{aligned} \forall x \geqslant 0,\ [(\mu - \lambda) \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{y_\lambda^2(t)} + 1] y_\lambda^2(x) &\leqslant [(\mu - \lambda) \frac{x}{y_\lambda^2(x)} + 1] y_\lambda^2(x) \\ &\leqslant (\mu - \lambda)x + y_\lambda^2(x) \\ &\leqslant (\mu - \lambda)x + y_\lambda^2(0) \\ &= (\mu - \lambda)x + 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \geqslant 0,\ y_\lambda(x)y_\mu(x) \leqslant 1 + (\mu - \lambda)x$.

6. Soit $x \leqslant 0$. Comme $y_\mu' \geqslant 0$, y_μ est croissante,

$$y_\lambda(x)y_\mu(x) \leqslant y_\lambda(x)y_\mu(0) = y_\lambda(x) = y_\mu(x) + (\lambda-\mu)\psi(x) \leqslant 1 + (\lambda-\mu)x.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ y_\lambda(x)y_\mu(x) \leqslant 1 + (\mu-\lambda)|x|$.

Partie II

1. On suppose que f est intégrable. Soit $x \in \mathbb{R}$. $y_\lambda > 0$ et y_λ est décroissante, et $y_\mu > 0$ et y_μ est croissante. Alors d'une part,

$$\forall t \in]-\infty, x],\ y_\mu(t)|g(t)| \leqslant y_\mu(x) \underbrace{|f(t)|}_{\text{intégrable}}.$$

Donc $\int_{-\infty}^{x} y_\mu(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.
D'autre part,

$$\forall t \in [x, +\infty[,\ y_\lambda(t)|g(t)| \leqslant y_\lambda(x) \underbrace{|f(t)|}_{\text{intégrable}}.$$

Donc $\int_{x}^{+\infty} y_\lambda(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ existe. Donc h est bien définie.
On a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) =& \frac{1}{\lambda-\mu}\Big[y_\lambda''(x)\int_{-\infty}^{x} y_\mu(t)f(t)\,\mathrm{d}t + 2y_\lambda'(x)y_\mu(x)f(x) \\ &+ y_\lambda(x)(y_\mu'(x)f(x) + y_\mu(x)f'(x)) + y_\mu''(x)\int_{x}^{+\infty} y_\lambda(t)f(t)\,\mathrm{d}t \\ &- 2y_\mu'(x)y_\lambda(x)f(x) - y_\mu(x)(y_\lambda'(x)f(x) + y_\lambda(x)f'(x))\Big] \\ =& \frac{1}{\lambda-\mu}\big[q(x)h(x) + y_\lambda'(x)y_\mu(x)f(x) - y_\lambda(x)y_\mu'(x)f(x)\big].\end{aligned}$$

Or, $y_\lambda = y_\mu + (\lambda-\mu)\psi$.
Donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_\lambda'(x)y_\mu(x) - y_\lambda(x)y_\mu'(x) = (\lambda-\mu)(\psi'(x)\varphi(x) - \psi(x)\varphi'(x)) = \lambda-\mu$$

(d'après I.2.c)).

Donc $h \in \mathcal{E}_f$.

2. Supposons que $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente. Soit $x \in \mathbb{R}$.
D'une part, puisque y_λ est décroissante,

$$\forall t \in]-\infty, x],\ y_\lambda(x)y_\mu(t)|f(t)| \leqslant y_\lambda(t)y_\mu(t)|f(t)| \leqslant \big[1 + (\mu-\lambda)|t|\big]|f(t)|$$

(d'après I.6.).
D'autre part, puisque y_μ est croissante,

$$\forall t \in [x, +\infty[,\ y_\lambda(t)y_\mu(x)|f(t)| \leqslant y_\lambda(t)y_\mu(t)|f(t)| \leqslant [1 + (\mu-\lambda)|t|]|f(t)|.$$

Donc

$$\begin{aligned}|h(x)| &\leqslant \frac{1}{\mu-\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} y_\mu(t)y_\lambda(t)|f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{\mu-\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}|tf(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty.\end{aligned}$$

Donc h est bornée.

3. Soit $g \in \mathcal{E}_f$ bornée. Comme $h \in \mathcal{E}_f$ et est bornée, $g-h \in \mathcal{E}$ est bornée. D'où l'existence. L'unicité de la solution bornée de $\mathcal{E}$ est assurée par la question I.1.b)).

   Ainsi, si $\int_{-\infty}^{+\infty}|xf(x)|\,\mathrm{d}x$ converge, alors $(\mathcal{E}_f)$ admet une unique solution bornée.

Partie III

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\forall t \geqslant x,\ |xq(t)| \leqslant |tq(t)|.$$

Or,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|q(x)\,\mathrm{d}x<+\infty,$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}|tq(t)|\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|tq(t)|\,\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{x}|tq(t)|\,\mathrm{d}t=0.$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} x\int_x^{+\infty}|q(t)|=0$.

Pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_0^r\Big[\int_x^{+\infty}q(t)\,\mathrm{d}t\Big]\,\mathrm{d}x &= \Big[x\int_x^{+\infty}q(t)\,\mathrm{d}t\Big]_0^r+\int_0^r xq(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{r\int_r^{+\infty}q(t)\,\mathrm{d}t}_{\underset{r\to+\infty}{\to}0}+\underbrace{\int_0^r xq(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{converge}}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_0^{+\infty}\big[\int_x^{+\infty}q(t)\,\mathrm{d}t\big]\,\mathrm{d}x$ converge.

2. a) Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+,\ f(x)=y'(x)+\int_x^{+\infty}q(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ qui existe bien puisque y est bornée et q est intégrable donc qy est intégrable. Par hypothèse, pour tout $x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x)\geqslant 0$. Donc f est croissante, et admet une limite $l \in \mathbb{R}$.

   Comme $\int_x^{+\infty}q(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\lim_{x\to+\infty}y'(x)=\ell$. Si par l'absurde, $\ell<0$, il existe $A\geqslant 0$ tel que pour tout $x\geqslant A,\ y'(x)\leqslant \ell/2$, et donc pour tout $x\geqslant A,\ y'(x)\leqslant \frac{\ell}{2}x+y(0)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$ ce qui est absurde car y est bornée. On montre de même que ℓ ne peut être strictement positif.

   Ainsi, $\forall x\geqslant 0,\ y'(x)+\int_x^{+\infty}q(t)y(t)\,\mathrm{d}t\leqslant 0$.

b) Soit $M > 0$ tel que $\forall x \geqslant 0,\ |y(x)| \leqslant M$.

Comme $y'' - qy \geqslant 0$,

$$\int_0^{+\infty} |x[y''(x) - q(x)y(x)]| \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x[y''(x) - q(x)y(x)] \,\mathrm{d}x$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_0^r x[y''(x) - q(x)y(x)] \,\mathrm{d}x =& \big[x(y'(x) + \int_x^{+\infty} q(t)y(t) \,\mathrm{d}t)\big]_0^r \\
&- \int_0^r (y'(x) + \int_x^{+\infty} q(t)y(t)) \,\mathrm{d}t) \,\mathrm{d}x \\
=& r \underbrace{\left(y'(r) + \int_r^{+\infty} q(t)y(t) \,\mathrm{d}t\right)}_{\leqslant 0} - y(r) + y(0) \\
&- \int_0^r \int_x^{+\infty} q(t)y(t) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x \\
\leqslant& y(0) - y(r) - \int_0^r \int_x^{+\infty} q(t)y(t) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^r \left| x[y''(x) - q(x)y(x)] \right| \mathrm{d}x &= \int_0^r x[y''(x) - q(x)y(x)] \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant |y(r)| + |y(0)| + \Big| \int_0^r \int_x^{+\infty} q(t)y(t) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x \Big|.
\end{aligned}$$

Or, $|y(r)| \leqslant M$, et
$\big| \int_0^r \int_x^{+\infty} q(t)y(t) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x \big| \leqslant M \int_0^r \big[\int_x^{+\infty} q(t) \,\mathrm{d}t \big] \,\mathrm{d}x < +\infty$.
Donc $\int_0^{+\infty} |x[y''(x) - q(x)y(x)]| \,\mathrm{d}x < +\infty$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x[y''(x) - q(x)y(x)] \,\mathrm{d}x$ est convergente.

3. On suppose que $f \geqslant 0$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) \,\mathrm{d}x$ diverge.
   On montre de façon analogue que si y est une fonction $\mathcal{C}^2$ bornée sur $]-\infty, 0]$, et vérifie $\forall x \leqslant 0,\ y''(x) - q(x)y(x) \geqslant 0$, alors $\int_{-\infty}^0 x[y''(x) - q(x)y(x)] \,\mathrm{d}x$ est convergente.
   Supposons par l'absurde qu'il existe $h \in \mathcal{E}_f$ bornée.
   Comme $\forall x \geqslant 0,\ h''(x) - q(x)h(x) = f(x) \geqslant 0$, $\int_0^{+\infty} x f(x) \,\mathrm{d}x$ est convergente et $\int_{-\infty}^0 -x f(x) \,\mathrm{d}x$ est convergente.
   Donc $\int_0^{+\infty} x f(x) \,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 -x f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) \,\mathrm{d}x$ est convergente. Absurde.

   Donc (E_f) n'admet pas de solution bornée.

Partie IV

En posant $\forall x \in \mathbb{R},\ q(x) = 1$, l'équation (E_f) devient $y'' - y = f$.
Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f_1(x) = 1 \\ f_2(x) = x^2. \end{cases}$$

Les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_1(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_2(x)\,\mathrm{d}x$ divergent.
$y = -1$ est une solution bornée de E_{f_1}. Les solutions de E_{f_2} sont de la forme $x \longmapsto Ae^{x} + Be^{-x} - (x^2 + 2)$ qui ne peuvent être bornées.