Sujet — Lyon, deuxième épreuve, 1988

Partie I

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls, telle que la série entière $\sum_{x=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour $|x| < 1$. On note $f(x)$ sa somme et on suppose qu'il existe $s \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = s.$$

   a) Montrer que la série de terme général a_n est convergente de somme s.

   b) Montrer par un exemple que ce résultat est en général faux pour une suite (a_n) dont les termes ne sont pas tous positifs ou nuls.

2. Soit $F(x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$F^{(n)}(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [0,1[,\ \forall n \geqslant 0,$$

$F^{(n)}$ désignant la dérivée d'ordre n de F. Pour $n \geqslant 0$ on pose :

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n F^{(n+1)}(tx)\,\mathrm{d}t.$$

   a) Montrer que pour $0 \leqslant x < y < 1$ on a :

$$0 \leqslant r_n(x) \leqslant r_n(y)\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}.$$

   b) En déduire que pour $0 \leqslant x < 1$, $F(x)$ est somme de sa série de Taylor à l'origine.

   c) On remplace l'intervalle $[0,1[$ par $]-1,1[$ dans les hypothèses. Montrer que pour $-1 < x < 1$, $F(x)$ est somme de sa série de Taylor à l'origine.

Partie II

Notation

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On note $E(0,a)$ l'ensemble des fonctions continues f de $[0,a]$ dans $\mathbb{R}$, qui sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,a[$, et telles que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [0,a[$ et $f(a) = 0$.

2. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{R}_+$. On considère le problème (1) associé aux conditions :

$$\begin{cases} G(y)G''(y) + y^{m+1} = 0 \text{ pour } 0 \leqslant y < d \\ G(0) = 1 \\ G'(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Supposons qu'il existe $d > 0$ et une fonction $G(0,d)$, solution du problème (1).
   Montrer qu'il existe une fonction $g \in E(0,1)$ et un nombre $k \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\begin{cases} g(x)g''(x) + x^{m+1} = 0 \text{ pour } 0 \leqslant x < 1 \\ g'(0) = 0 \\ g(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

   et de plus $g(0) = k$.

2. Montrer que l'équation différentielle

$$G(y)G''(y) + y^{m+1} = 0$$

possède une et une seule solution maximale telle que $G(0) = 1$ et $G'(0) = 0$. On énoncera avec précision le théorème utilisé pour cela.
On note maintenant $I =]c, d[$ l'intervalle sur lequel est définie cette solution maximale.

3. On suppose d'abord que $d = +\infty$.
Montrer qu'on ne peut avoir :

$$G(y) > 0, \text{ pour tout } y > 0.$$

En déduire que ce cas est impossible.

4. On a donc $0 < d < +\infty$.
   a) Montrer que G peut être prolongée par continuité en $y = d$.
   b) En déduire que le problème (1) possède une solution $G \in E(0, d)$.

Partie III

On se donne une fonction h de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}_+$, continue.
On considère le problème (3) associé aux conditions :

$$\begin{cases} g(x)g''(x) + 2xh(x) = 0 \text{ pour } 0 \leqslant x < 1 \\ g(1) = 0 \\ g'(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

On se propose de montrer que ce problème admet au plus une solution g dans $E(0, 1)$.
Soient g_1 et g_2 deux éléments de $E(0, 1)$, solutions de (2).

1. On suppose $g_1(0) < g_2(0)$.
   a) Montrer qu'il existe $x_0 \in]0, 1]$ tel que

$$g_1(x) < g_2(x), \ \forall x \in [0, x_0[, \text{ et } g_1(x_0) = g_2(x_0).$$

   b) Montrer que $g_2''(x) \geqslant g_1''(x)$ sur $]0, x_0[$.
   En déduire que $g_2(x) - g_1(x) \geqslant g_2(0) - g_1(0)$, $\forall x \in]0, x_0[$.
   Conclure.

2. On a donc $g_1(0) = g_2(0)$. On suppose maintenant que $g_1(x) - g_2(x)$ n'est pas identiquement nul sur $[0, 1]$.
   a) Montrer qu'il existe $x_1 \in]0, 1[$ tel que :

$$g_1(x_1) \neq g_2(x_1) \text{ et } g_1'(x_1) = g_2'(x_1).$$

   b) En exhibant une contradiction, en déduire que $g_1(x) = g_2(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Partie IV

On considère le problème (3) associé aux conditions :

$$\begin{cases} g(x)g'(x) + 2x = 0 \text{ pour } 0 \leqslant x < 1 \\ g(1) = 0 \\ g'(0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

1. Montrer que la seule solution g de (4) appartient à $E(0,1)$ est indéfiniment dérivable sur $[0,1[$.
2. Pour $n \geqslant 0$, donner une expression de $g^{(n+3)}$ en fonction des $g^{(i)}$ pour $0 \leqslant i \leqslant n+2$.
3. En déduire que la fonction $F(x) = -[g(x) - g(0)]$ vérifie :

$$F^{(n)}(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [0,1[.$$

4. Montrer que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ pour } x \in [0,1].$$

5. On pose $a_0 = g(0)$. Montrer que $g^{3n}(0) = -(3n)! \frac{b_n}{a_0^{2n-1}},\ n = 1, 2, \dots$

$$b_1 = \frac{1}{3} \text{ et } b_n = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} b_p b_{n-p} \left(1 - \frac{6p(n-p)}{n(3n-1)}\right),\ n \geqslant 2.$$

Partie V

1. On pose $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{x^{2n-1}}$, pour $x > 0$ et $N = 1, 2, \dots$
   Montrer que chaque équation $S_N(x) = x$ admet une et une seule racine positive x_N, que la suite $(x_N)_{N \geqslant 1}$ est croissante et qu'elle converge vers a_0.
2. On considère $x \geqslant a_0$ les fonctions :

$$P(x) = x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{x^{2n-1}}, \quad Q(x) = x^2 - \frac{2}{3} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Phi(n)}{x^{2n-1}},$$

   où

$$\Phi(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{6k(n-k)}{n(3n-1)} b_k b_{n-k}.$$

   Quelle relation y a-t-il entre $P(x)$ et $Q(x)$?
3. On pose, pour $x > 0$ et $N = 2, 3, \dots$, $T_N(x) = \sum_{n=2}^{N} \frac{\Phi(n)}{x^{2(n-1)}}$.
   Montrer que chaque équation $2/3 - x^2 = T_N(x)$ admet deux racines positives y_N et z_N telles que la suite $(y_N)_{N \geqslant 2}$ soit croissante, $(z_N)_{N \geqslant 2}$ soit décroissante, $y_N < a_0 < z_N$ et $\lim y_N = \lim z_N = a_0$ quand N tend vers $+\infty$.
4. En utilisant les suites (x_N) et (z_N) déterminées aux questions V.1. et V.3. donner une valeur de a_0 avec une erreur inférieure à 10^{-1}.

Proposition de solution

Partie I

1. a) Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de termes positifs ou nuls, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_n x^n \leqslant f(x) \leqslant s.$$

À n fixé, par passage à la limite, lorsque x tend vers 1,

$$\sum_{k=0}^{n} a_n \leqslant s.$$

La série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée, elle est donc convergente puisque les termes sont positifs ou nuls. Donc la série est normalement convergente sur $[-1,1]$, et donc f est continue sur cet intervalle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $|x| \leqslant 1$, $a_n|x|^n \leqslant a_n$.

Donc par théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x\to 1, x<1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s.$$

$\boxed{\text{Ainsi, la série de terme général } a_n \text{ est convergente de somme } s.}$

b) Considérons $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ sur $]-1,1[$. La série de terme général $(-1)^n$ n'est pas convergente.

2. a) Soient $0 \leqslant x < y < 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, $F^{n+2} \geqslant 0$ sur $[0,1[$, donc F^{n+1} est croissante. Donc,

$$\forall t \in [0,1[,\ (1-t)^n F^{(n+1)}(tx) \leqslant (1-t)^n F^{(n+1)}(ty).$$

Donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant r_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n F^{(n+1)}(ty)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} r_n(y).$$

$\boxed{\text{Ainsi, pour } 0 \leqslant x < y < 1,\ 0 \leqslant r_n(x) \leqslant r_n(y) \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}.}$

b) Soit $0 \leqslant x < 1$. Soit $y \in]x,1[$. Comme F est $\mathcal{C}^\infty$, elle admet un développement de Taylor avec reste intégral en 0 à l'ordre n et $n+1$, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$F(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} y^k + r_n(y) \text{ et } \sum_{k=0}^{n+1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} y^k + r_{n+1}(y).$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r_{n+1}(y) = r_n(y) - \frac{F^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} y^{n+1}.$$

Or, $x \geqslant 0$, et $F^{n+1} \geqslant 0$. Donc la suite $(r_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc converge dans $\mathbb{R}_+$.
D'après la question précédente,

$$0 \leqslant r_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n F^{(n+1)}(ty)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} r_n(y).$$

Donc par passage à la limite à droite, comme $(r_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Donc $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Ainsi, pour $0 \leqslant x < 1$, $F(x)$ est somme de sa série de Taylor à l'origine.

c) Soit $x \in]-1, 0[$. L'égalité de I.2.a) reste valable pour $y \in]0, 1[$.
De même pour $y \in]0, 1[$, $(r_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc les arguments précédents restent valables, et le reste intégral $(r_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Ainsi, pour $-1 < x < 1$, $F(x)$ est somme de sa série de Taylor à l'origine.

Partie II

1. Posons, pour tout $0 \leqslant x < 1$, $g(x) = \frac{1}{d^{(m+3)/2}}G(dx)$, de sorte que, pour tout $x \in [0, 1[$,

$$g(x)g''(x) + x^{m+1} = \frac{1}{d^{m+1}}G(dx)G''(dx) + x^{m+1}.$$

Or, si $x \in [0, 1[$, $dx \in [0, d[$, donc $G(dx)G''(dx) + d^{m+1}x^{m+1} = 0$.
Donc $g(x)g''(x) + x^{m+1} = 0$.
De plus, $g'(0) = \frac{1}{d^{(m+1)/2}}G'(0) = 0$, et $g(0) = \frac{1}{d^{(m+3)/2}}G(d) = 0$ par hypothèse sur G. Enfin, $g(0) = \frac{1}{d^{(m+3)/2}}G(0) = \frac{1}{d^{(m+3)/2}} > 0$.

Ainsi, il existe $g \in E(0, 1)$ et un nombre $k \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\begin{cases} g(x)g''(x) + x^{m+1} = 0 \text{ pour } 0 \leqslant x < 1 \\ g'(0) = 0 \\ g(1) = 0 \\ g(0) = k \end{cases}.$$

2. Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,1[\times\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}) & \longmapsto & \begin{pmatrix} g' \\ -\frac{x^{m+1}}{g} \end{pmatrix} \end{array}$. Elle définit l'équation différentielle donnée :

$$\begin{pmatrix} g' \\ g'' \end{pmatrix} = f(x, \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}).$$

La fonction f est clairement continue.

Soient g_1 et g_2 deux solutions de l'équation différentielle. Comme g_1 et g_2 sont continues sur $[0,1]$, elles y sont bornées. De plus, elle sont nécessairement non nulles. Donc il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $m \geqslant |g_1|$ et $m \geqslant |g_2|$

$$\|f(x, \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}) - f(x, \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}\|_2 = \sqrt{(g_1' - g_2')^2 + (\frac{x^{m+1}}{g_1} - \frac{x^{m+1}}{g_2})^2}$$
$$\leqslant \sqrt{(g_1' - g_2')^2 + \frac{1}{m^2}(g_1 - g_2)^2} \leqslant \max(1, \frac{1}{m^2})\| \begin{pmatrix} g_1 \\ g_1' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_2 \\ g_2' \end{pmatrix}\|_2$$

Donc f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale g telle que $\begin{cases} g'(0) = 0 \\ g(0) = \frac{1}{d^{(m+3)/2}} \end{cases}$.

Via le changement de variable inverse, l'équation différentielle possède une et une seule solution maximale telle que $\begin{cases} G(0) = 1 \\ G'(0) = 0 \end{cases}$.

3. On suppose que $d = +\infty$. Supposons par l'absurde $G(y) > 0$ pour tout $y > 0$. Alors, pour tout $y > 0$, $G''(y) < 0$. Donc G' est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $G'(0) = 0$, donc $G'(y)\langle 0$, pour tout $y > 0$. On peut trouver $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $y \geqslant \delta$, $G'(x) \leqslant -\varepsilon < 0$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a, pour tout $y \geqslant \delta$,

$$G(y) = G(\delta) + \int_\delta^y G'(x)\,\mathrm{d}x \leqslant G(\delta) - \varepsilon(y - \delta).$$

En faisant tendre y vers $+\infty$, ce qui est possible puisque $d = +\infty$,

$$\lim_{y \to \infty} G(y) = -\infty.$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $G(y) > 0$ pour tout $y > 0$.

Si G est solution de l'équation différentielle, nécessairement, $G(y) > 0$, pour tout $y > 0$. En effet, si G change de signe, comme G est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe y_0 tel que $G(y_0)$, alors $0 = G(y_0)G''(y_0) = -y_0^{m+1}$. Donc $y_0 = 0$. Or $G(0) = 1$, ce qui est contradictoire. Donc G est de signe constant, et $G > 0$.

4. a) D'après la question précédente, G est décroissante, donc admet une limite finie ou infinie en d. Or, $G(y) > 0$ pour tout $y \in I$, donc la limite est finie. On peut donc prolonger G en d par continuité.

   b) Il suffit de montrer que $G(d) = 0$, puisque G est continue sur $[0, d]$ et $\mathcal{C}^2$ sur $[0, d[$. Si $G(d) > 0$, $G''(y) = -\frac{y^{m+1}}{G(y)}$ est prolongeable par continuité en d et G' l'est également, donc G vérifie l'équation différentielle sur $[0, d]$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, G est prolongeable dans un voisinage de d, ce qui est absurde car elle est supposée maximale.

Partie III

1. a) Soit $E = \{x \in [0,1],\ g_1(x) = g_2(x)\}$. Posons E est un ensemble non vide car contient 1 et est minoré par 0 donc admet une borne inférieur $x_0 \leqslant 1$. Il existe une suite $(x_n)_n$ de E qui converge vers x_0.

   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(g_2 - g_1)(x_n) = 0$. Par passage à la limite et continuité de $g_2 - g_1$,

$$(g_2 - g_1)(x_0) = 0.$$

   Comme $x_0 = \inf(E)$ et $g_2 - g_1$ est continue, pour tout $x \leqslant x_0$, $g_2(x) > g_1(x)$.

   Ainsi, il existe $x_0 \in]0,1]$ tel que

$$\forall x \in]0,1],\ g_1(x) < g_2(x) \text{ et } g_1(x_0) = g_2(x_0).$$

   b) Par hypothèse sur g_1, g_2 et h, pour tout $x \in [0, x_0[$,

$$g_1(x) < g_2(x)$$

   donc

$$-\frac{2xh(x)}{g_1(x)} \leqslant -\frac{2xh(x)}{g_2(x)}$$

   i.e.

$$g_1''(x) \leqslant g_2''(x).$$

   Donc $(g_2 - g_1)''$ est positive sur $[0, x_0[$, donc $(g_2 - g_1)'$ est croissante sur $[0, x_0[$. Or, $(g_2 - g_1)'(0) = 0$ donc $(g_2 - g_1)'$ est positive sur cet intervalle. Donc $g_2 - g_1$ est croissante sur $[0, x_0[$.

   Ainsi, pour tout $x \in [0, x_0[$, $g_2(x) - g_1(x) \geqslant g_2(0) - g_1(0) > 0$. Par passage à la limite en x_0^-, $g_2(x_0) - g_1(x_0) > 0$, ce qui est contradictoire avec la question précédente.

2. a) $g_1 - g_2$ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et $(g_1 - g_2)(0) = (g_1 - g_2)(1) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $x_1 \in]0,1[$ tel que $(g_1 - g_2)'(x_1) = 0$.

   Supposons par l'absurde que $g_1(x_1) = g_2(x_1)$. On a alors $\begin{cases} g_1(x_1) = g_2(x_1) \\ g_1'(x_1) = g_2'(x_1) \end{cases}$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $g_1 = g_2$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

   Ainsi, il existe $x_1 \in]0,1[$ tel que

$$g_1(x_1) \neq g_2(x_1) \text{ et } g_1'(x_1) = g_2'(x_1).$$

   b) Comme $(g_1 - g_2)'$ est continue sur $[0, x_1]$, dérivable sur $]0, x_1[$, et $(g_1 - g_2)'(0) = (g_1 - g_2)'(x_1) = 0$, d'après il le théorème de Rolles, il existe $x_2 \in]0,1[$ tel que $(g_1 - g_2)''(x_2) = 0$, ce qui est contradictoire avec le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Partie IV

1. L'existence d'une unique solution dans $E(0,1)$ est donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Par récurrence immédiate, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}$ est dérivable sur $[0,1[$.

2. Soit $n \geqslant 1$. D'après la formule de Leibniz, pour tout $x \in [0,1[$,

$$0 = (gg'')^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} g^{(k)}(x) g^{(n+3-k)}(x).$$

Donc pour tout $x \in [0,1[$,

$$g^{(n+3)}(x) = -\frac{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} g^{(k)}(x) g^{(n+3-k)}(x)}{g(x)}.$$

Pour $n = 0$, on a, pour tout $x \in [0,1[$,

$$g^{(3)}(x) = -\frac{2 + g'(x)g''(x)}{g(x)}.$$

3. Comme $g \in E(0,1)$, g'' est négative sur $[0,1]$.
Montrons par récurrence sur $n \geqslant 2$ que :

$$\forall k \leqslant n, \forall x \in [0,1], \; F^{(n)}(x) \geqslant 0 \tag{$\mathcal{H}_1$}$$

— $n = 2$: vrai d'après ce qui précède
— Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathcal{H}_1$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(x) &= -\frac{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)}{g(x)} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} F^{(k)}(x) F^{(n+1-k)}(x)}{g(x)} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence et $g(0) > 0$.

Comme g'' est négative, g' est décroissante. Or, $g'(0) = 0$, donc $F' = -g'$ est positive, et $F(x) = -(g(x) - g(0))$ est positive (car g est décroissante).

$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ F^{(n)}(x) \geqslant 0.}$

4. Comme F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0,1[$, $F^{(n)}(x) \geqslant 0$, d'après la question I.2.c), F est somme de sa série de Taylor en 0. Soit $x \in [0,1[$.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

De plus, par hypothèse sur g,

$$\lim_{x \to 1, x<1} F(x) = g(0) \geqslant 0.$$

et d'après la question précédente,

$$F^{(n)}(x) \geqslant 0, \; \forall x \in [0,1[.$$

Donc d'après la question I.1.a), pour tout $x \in [0,1]$,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$g(0) - g(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

i.e.

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

5. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que

$$\forall k \leqslant n,\ g^{(k)}(0) \neq 0 \text{ si } 3|k,\ \text{et } g^k(0) = 0 \text{ sinon} \tag{$\mathcal{H}_2$}$$

— $n = 1$: comme $g \in E(0,1)$, nécessairement, $g(0) > 0$. Par hypothèse, $g'(0) = 0$.

— Soit $n \geqslant 1$ tel que $\mathcal{H}_2$

  — Si $n+1 = 0 \mod 3$,

$$\begin{aligned} g^{(n+1)} &= -\frac{1}{g(0)} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(n+1-k)}(0) g^{(k)}(0) \\ &= -\frac{1}{g(0)} \sum_{\substack{k=1, \\ k=0 \mod 3}}^{n-1} g^{(n+1-k)}(0) g^{(k)}(0) \end{aligned}$$

  Or, par hypothèse de récurrence, comme $n+1-k = 0 \mod 3$ pour tout $k = 0 \mod 3$, $g^{(n+1)}(0) \neq 0$.

  — Si $n+1 \neq 0 \mod 3$, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on ne peut avoir simultanément $n+1-k = 0 \mod 3$ et $k = 0 \mod 3$. Donc par hypothèse de récurrence, $g^{(n+1)}(0) = 0$.

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée.

6. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n,\ g^{(3k)}(0) = -(3k)! \frac{b_k}{a_0^{2k-1}}. \tag{$\mathcal{H}_3$}$$

— $n = 1$: on a

$$g^{(3)}(0) = -\frac{2}{a_0} = \frac{-3! b_1}{a_0}.$$

— Soit $n \geqslant 1$ tel que $\mathcal{H}_3$.

$$\begin{aligned} g^{(3n+3)}(0) &= -\frac{1}{g(0)} \sum_{k=1}^{3n+1} \binom{3n+1}{k} g^{(k)}(0) g^{(3n+3-k)}(0) \\ &= -\frac{1}{g(0)} \sum_{p=1}^{n} \binom{3n+1}{3p} g^{(3p)}(0) g^{(3n+3-3p)}(0) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{g(0)}\sum_{p=1}^{n}\binom{3n+1}{3p}(3p)!\frac{b_p}{a_0^{2p-1}}(3n+3-3p)!\frac{b_{n+1-p}}{a_0^{2n+2-2p-1}}$$

$$= -\frac{(3n+3)!}{a_0^{2n+1}}\sum_{p=1}^{n}\frac{(3n+2-3p)(3n+3-3p)}{(3n+2)(3n+3)}b_pb_{n+1-p}$$

$$= -\frac{(3n+3)!}{a_0^{2n+1}}\sum_{p=1}^{n}\frac{(3n+2-3p)(n+1-p)}{(3n+2)(n+1)}b_pb_{n+1-p}$$

$$= -\frac{(3n+3)!}{a_0^{2n+1}}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{(3n+2)(n+1-p)}{(3n+2)(n+1)}-\frac{3p(n+1-p)}{(3n+2)(n+1)}\right)b_pb_{n+1-p}$$

$$= -\frac{(3n+3)!}{a_0^{2n+1}}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{n+1-p}{n+1}-\frac{3p(n+1-p)}{(3n+2)(n+1)}\right)b_pb_{n+1-p}$$

$$= -\frac{(3n+3)!}{2a_0^{2n+1}}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{2(n+1-p)}{n+1}-\frac{6p(n+1-p)}{(3n+2)(n+1)}\right)b_pb_{n+1-p}$$

$$= -\frac{(3n+3)!}{2a_0^{2n+1}}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{n+1-p}{n+1}+\frac{p}{n+1}-\frac{6p(n+1-p)}{(3n+2)(n+1)}\right)b_pb_{n+1-p}$$

en intervertissant des termes

$$= -\frac{(3n+3)!}{2a_0^{2n+1}}\sum_{p=1}^{n}\left(1-\frac{6p(n+1-p)}{(3n+2)(n+1)}\right)b_pb_{n+1-p}.$$

Partie V

1. Soit $N \in \mathbb{N}$. Posons, pour tout $x>0$, $P_N(x) = x - S_N(x)$. P_N est clairement $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x>0,\ P_N'(x) = \sum_{n=1}^{N}\frac{(2n-1)b_n}{x^{2n}}+1>0$$

car b_n est strictement positif par définition.
Donc P_N est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Or,

$$\lim_{x\to 0^+} P_N(x) = -\infty,\ \text{et}\ \lim_{x\to+\infty} P_N(x) = 1>0.$$

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique $x_N>0$, tel que $P_N(x_N)=x_N$.

$\boxed{\text{Ainsi, chaque équation } S_N(x)=x \text{ admet une et une seule racine positive } x_N.}$

Comme $b_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et la suite $(P_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de fonctions croissantes, $(x_N)_{N\geqslant 1}$ est croissante donc admet une limite finie ou infinie.
De plus,

$$P_N(a_0) = \sum_{n=0}^{N}\frac{g^{(3n)}(0)}{(3n)!} > \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{g^{(3n)}(0)}{(3n)!} = g(1) = 0.$$

Donc $\forall N \geqslant 1$, $x_N \leqslant a_0$. Notons x la limite de (x_N).
$(S_N)_{N\geqslant 1}$ est une suite croissante de fonctions décroissantes, donc admet une limite S.
Pour $N \geqslant 1$, on a, pour tout $p \geqslant 0$,

$$S_N(x_{N+p}) \leqslant S_N(x_N) \leqslant S_{N+p}(x_N),$$

i.e.

$$S_N(x_{N+p}) \leqslant x_N \leqslant S_{N+p}(x_N).$$

Par passage à la limite, par continuité de S_N sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$S_N(a_0) \leqslant S_N(x) \leqslant x \leqslant S(x_N) \leqslant S(a_0).$$

puisque $x_N \leqslant a_0$.
Or,

$$S(a_0) = \lim_{N\to\infty} S_N(a_0) = \lim_{N\to\infty} -\sum_{n=1}^{N} \frac{g^{(3n)}(0)}{(3n)!} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(3n)}(0)}{(3n)!} + g(0) = g(1) + g(0) = a_0.$$

Donc par passage à la limite quand $N \to \infty$.

$$a_0 \leqslant x \leqslant a_0.$$

$\boxed{\text{Donc la suite } (x_N) \text{ converge vers } a_0.}$

2. Soit $x \geqslant a_0$.

$$\begin{aligned}
P(x) &= x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{x^{2n-1}} \\
&= x - \frac{1}{3x} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{x^{2n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} b_p b_{n-k}\left(1 - \frac{6k(n-k)}{n(3n-1)}\right) \\
&= x - \frac{1}{3x} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{2n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} + \frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{x^{2(n-1)}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{6k(n-k)}{n(3n-1)} b_k b_{n-k} \\
&= x - \frac{1}{3x} - \frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{x^{2n-2}} \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} + \frac{1}{2x}\left(Q(x) - x^2 + \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\left(Q(x) - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{x^{2n-1}}\right)^2\right)\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \geqslant a_0,\ P(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\left(Q(x) - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{x^{2n-1}}\right)^2\right)\right).}$

3. Posons, pour tout $x > 0$, $Q_N(x) = T_N(x) - \frac{2}{3} + x^2$. On a, Q_N est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$Q_N''(x) = \sum_{n=2}^{N} \frac{(2n-2)(2n-1)\Phi(n)}{x^{2n}} + 2 > 0.$$

Or,
— $\lim_{x \to 0} Q_N'(x) = -\infty$,
— $\lim_{x \to +\infty} Q_N'(x) = +\infty$,
— $\lim_{x \to 0} Q_N(x) = +\infty$,
— $\lim_{x \to +\infty} Q_N(x) = +\infty$.
En notant $m_N > 0$ le réel tel que $Q_N'(m_N)$ on a donc le tableau de signes et de variations suivant :

x	0		m_N		$+\infty$
$Q_N''(x)$		$+$		$+$	
$Q_N'(x)$		$-$		$+$	
Q_N	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Or,

$$Q_N(a_0) < Q(a_0) = -a_0^2 + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{x^{2n-1}} \right)^2 = (S(a_0) - a_0)\,(S(a_0) + a_0) = 0.$$

Donc $Q_N(m_N) < 0$.
Donc Q_N admet deux racines positives $y_N < z_N$ qui sont de part et d'autre de a_0. $(Q_N)_{\mathbb{N} \geqslant 2}$ étant une suite croissante puisque T_N l'est, nécessairement $(y_N)_{N \geqslant 2}$ est croissante et $(z_N)_{N \geqslant 2}$ est décroissante, et on a

$$y_N \leqslant y_{N+1} \leqslant a_0 \leqslant z_{N+1} \leqslant z_N.$$

Les suites (y_N) et (z_N) étant monotones, et bornées, elles sont convergentes. Notons y et z leur limite. De l'inégalité précédente, on tire

$$y \leqslant a_0 \leqslant z.$$

Soit $N_0 \geqslant 2$. Pour tout $N \geqslant N_0$, $Q_N(y_N) = 0$, donc

$$y_N^2 - \frac{2}{3} + \sum_{n=2}^{N_0} \frac{\Phi(n)}{y^{2n-2}} \leqslant y_N^2 - \frac{2}{3} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Phi(n)}{y_N^{2n-2}} = 0.$$

Donc par passage à la limite,

$$\sum_{n=2}^{N_0} \frac{\Phi(n)}{y^{2n-2}} \leqslant \frac{2}{3} - y^2.$$

Ceci étant vrai pour tout $N_0 \geqslant 2$, par passage à la limite, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\Phi(n)}{y^{2n-2}}$ converge, et

$$Q(y) \leqslant 0.$$

Donc $P(y) = 0$.
Si par l'absurde $y < a_0$, alors

$$y - a_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left(\frac{1}{y^{2n-1}} - \frac{1}{a_0^{2n-1}} \right) > 0,$$

ce qui est contradictoire. Donc $y = a_0$.
On montre de façon analogue que $z = a_0$.

Ainsi, $\lim y_N = \lim z_N = a_0$.

4. Il suffit par exemple de calculer x_2 et z_2. On a $b_1 = \frac{1}{3}$, $b_2 = \frac{1}{45}$, $\Phi(2) = \frac{1}{15}$, $\Phi(3) = \frac{1}{90}$.
x_2^2 est racine du polynôme $X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{45}$ qui a une racine positive $\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{5}}$. Donc $x_2 = (\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{5}})^{1/2} \simeq 0,89$. De même, z_2^2 est la plus grande racine du polynôme $X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{1}{15}$. Donc $z_2 \simeq 1,09$.