# Sujet — Ulm et Cachan, épreuve commune 1994

## Préambule

Ce préambule comprend divers notations et résultats que les candidats pourront utiliser sans démonstration.

On désigne par $E$ l'espace vectoriel sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ formé par les fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et qui sont **périodiques de période** $2\pi$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, $e_n \in E$ est l'élément $e_n(x) = e^{inx},\ x \in \mathbb{R}$. À $f$ et $g$ dans $E$, on associe le nombre complexe :

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

et on note $\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}$. On admettra que $(\cdot,\cdot)$ est un produit scalaire qui fait de $E$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$.

On désigne par $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $E$ :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}.$$

On admettra que $E$ muni de cette norme est complet.

Pour $N \in \mathbb{N}$, $E_N$ désigne l'espace vectoriel engendré par $e_n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $n \in [-N,N]$. On désigne par $D_N$ l'élément de $E_N$ : $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ et on pourra utiliser que, pour tout $x \in ]0,2\pi[$,

$$D_N(x) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathbb{F}_m$ l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ des classes d'équivalence dans $\mathbb{Z}$ modulo $m$.

Étant donné une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on dira que la « série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est absolument convergente » (en abrégé $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série S.A.C.) si la série de terme général $(|u_{-n}| + |u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ ou $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ la somme de cette série où :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = u_0 + \sum_{n\geqslant 1}(u_{-n} + u_n).$$

On admettra sans démonstration que tous les résultats sur les S.A.C. indexés par $\mathbb{N}$ s'étendent aux S.A.C. indexées par $\mathbb{Z}$ et par exemple si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont telles que $(|a_n|^2 + |b_n|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C, alors $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C. et

$$\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_nb_n\Big| \leqslant \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|b_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \text{(Inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désignera un entier supérieur ou égal à $1$ qui pourra varier.

## Partie I

À $f \in E$, on associe la suite de ses coefficients de Fourier $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ :

$$f_n = (e_n, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x.$$

1. Soit $f \in E$, montrer que $(|f_n|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C. et que sa somme est
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C., on désigne par $S_N$ l'élément de $E$ : $S_N = \sum_{n=-N}^{N} u_n e_n$. Montrer que $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge vers un élément $u$ de $E$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
   Quels sont les coefficients de Fourier de $u$ ?
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $u_n = 0$ pour $n \leqslant 0,\ u_1 = -1$ et $u_n = \frac{1}{n(n-1)}$ pour $n \geqslant 2$.
   Montrer que l'élément $u$ de $E$ obtenu par le procédé de la question I.2. n'est pas dérivable en $x = 0$ (on pourra écrire pour $N \geqslant 2$ arbitraire et $x \neq 0$,
$$\mathrm{Im}\frac{u(x)-u(0)}{x} = \mathrm{Im}\frac{S_N(x)-S_N(0)}{x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n-1)x},$$
   $\mathrm{Im}z$ désignant la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$ et conclure en prenant $x = \frac{1}{N}$).
4. On désigne par $\Sigma_N$ l'élément de $E$ : $\Sigma_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{e_n}{n}$.
   Montrer que la suite $(\Sigma_N)_{N\geqslant 1}$ est de Cauchy dans $E$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.
5. Montrer que si la suite $(\Sigma_N)_{N\geqslant 1}$ converge vers $\sigma \in E$ pour la norme $\|\cdot\|_2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$u(x) = (e^{ix}-1)\sigma(x),$$
   où $u$ a été défini en I.3.
6. Déduire des questions I.3. et I.5. que $E$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ n'est pas complet.

## Partie II

1. Étant donné $f \in E$, montrer qu'il existe un et un seul élément $g$ de $E_N$ tel que $\|g-f\|_2$ réalise le minimum de $\|h-f\|_2$ lorsque $h$ parcours $E_N$.
   On notera $P_N f$ au lieu de $g$.
2. Montrer que $P_N$ est un projecteur de $E$ sur $E_N$ et que pour tout $f \in E$,
$$\|P_N f\|_2 \leqslant \|f\|_2.$$
3. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(P_N f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y)\,\mathrm{d}y.$$
   b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(P_N f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) D_N(y)\,\mathrm{d}y.$$
4. On désigne par $\alpha_N$ la borne supérieure de l'ensemble des nombres $\|P_N f\|_\infty$ lorsque $f$ décrit la boule unité de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Montrer que $\alpha_N \leqslant \sqrt{2N+1}$.

5. On désigne par $L_N$ le nombre $L_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\,\mathrm{d}x$, et pour $\varepsilon > 0$, $\psi_N^\varepsilon$ l'élément de $E$ défini par
$$\psi_N^\varepsilon(x) = \frac{D_N(x)}{\sqrt{\varepsilon + D_N^2(x)}},\ x \in \mathbb{R}.$$
Montrer, en utilisant les $\psi_N^\varepsilon$ que $\alpha_N \leqslant L_N$ (on pourra monter que pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$0 \leqslant |y| - \frac{y^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + y^2}} = \frac{\varepsilon|y|}{\sqrt{\varepsilon + y^2}(\sqrt{\varepsilon + y^2} + |y|)} \leqslant \sqrt{\varepsilon}).$$
6. Montrer que lorsque $N$ tend vers l'infini, $L_N$ est équivalent à $\frac{4}{\pi^2}\log N$.
7. Que pouvez-vous conclure (en vous inspirant de la question I.2.) ?

## Partie III

On désigne par $H_1$ le sous-espace de $E$ formé par les éléments $f$ tels que
$$((1+n^2)|f_n|^2)$$
est une S.A.C.
On note alors pour $f \in H_1$, $\|f\|_1 = (\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)|f_n|^2)^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer que si $f \in E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors $f \in H_1$ et $\|f\|_1^2 = \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2$. Réciproquement si $f \in H_1$, $f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ?
2. Montrer que $E_1 = \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap E$ est dans dans $E$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.
3. Soit $f \in H_1$, montrer que :
$$\|P_N f - f\|_2 \leqslant \frac{1}{N+1}\|f\|_1.$$
4. En écrivant, pour $g \in E_1$, $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$,
$$g^2(x) - g^2(y) = 2\int_y^x g(t)g'(t)\,\mathrm{d}t,$$
montrer qu'il existe une constante $K_1 \in ]0,+\infty[$ telle que pour tout $f \in H_1$, $\|f\|_\infty \leqslant K_1\|f\|_2^{\frac{1}{2}}\|f\|_1^{\frac{1}{2}}$.
5. En déduire que pour tout $f \in H_1$ et $N \geqslant 1$,
$$\|P_N f - f\|_\infty \leqslant \frac{K_1}{N+1}\|f\|_1,$$
et expliquer brièvement l'intérêt de cette inégalité en terme d'approximation de fonctions et justifier l'introduction de l'espace $H_1$.

## Partie IV

1. Montrer que si $f \in H_1$, $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_1$.
2. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $H_1$ et que $H_1$ muni de cette norme est complet.
3. Montrer qu'il existe une constante $K_2$ telle que pour tout $f \in H_1$,
$$\|f\|_\infty \leqslant K_2\|f\|_1.$$

4. Soit $(g^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $H_1$ telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \|g^p\|_1 \leqslant 1.$$

 a) Montrer qu'il existe une application strictement croissante $\psi$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suite des produits scalaires $((g^{\psi(p)}, e_n))_{p\in\mathbb{N}}$ soit convergente. On note alors $\ell_n$ la limite de cette suite.
 b) Montrer que la suite de fonctions $S_N$, où $S_N = \sum_{n=-N}^{N} \ell_n e_n$ converge vers une fonction $\ell \in E$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
 c) Montrer que $\ell \in H_1$.
 d) Montrer par exemple, qu'en général $\|g^{\psi(p)} - \ell\|_1$ ne tend pas vers zéro lorsque $p$ tend vers $+\infty$.

## Partie V

On désigne par $x_j$ le point $\frac{2\pi}{2N+1}j$ pour $j \in \mathbb{Z}$. On observe alors que pour $f \in E$, $f(x_j)$ ne dépend que de la classe de $j$ modulo $2N+1$, ce qui permet de parler de $f(x_j)$ pour $j \in \mathbb{F}_{2N+1}$.

1. Montrer que la matrice carrée d'ordre $2N+1$ $(e^{i\ell x_j})_{0\leqslant j\leqslant 2N,\ 0\leqslant \ell\leqslant 2N}$ a pour inverse la matrice :

$$\left(\frac{1}{2N+1}e^{-i\ell x_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant 2N,\ 0\leqslant \ell\leqslant 2N}.$$

2. a) Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe un unique élément de $E_N$ (noté $C_N f$) tel que :

$$\forall j \in \mathbb{F}_{2N+1},\ (C_N f)(x_j) = f(x_j).$$

 b) Montrer que $C_N$ est une application linéaire de $E$ dans $E_N$.
 c) Montrer que $C_N \neq P_N$ (on pourra remarquer que $C_N e_{2N+1} = e_0$).

3. On désigne par $\mathcal{E}_{2N+1}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{F}_{2N+1}$ dans $\mathbb{C}$, on note $(z_k)_{k\in\mathbb{F}_{2N+1}}$ ces applications.
 a) À $z \in \mathcal{E}_{2N+1}$, on associe $\hat{z} : k \longmapsto \hat{z}_k$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ défini par :

$$\hat{z}_\ell = \frac{1}{2N+1} \sum_{k\in\mathbb{F}_{2N+1}} e^{-i\ell x_k} z_k.$$

 Montrer que $\hat{z}_\ell$ ne dépend que de la classe de $\ell$ modulo $2N+1$. Ceci nous permet de considérer $\hat{z}$ comme un élément de $\mathcal{E}_{2N+1}$.
 b) On dit que $\hat{z}$ est la transformée de Fourier discrète (T.F.D.) de $z$. On note $\varphi = (\varphi_k)_{k\in\mathbb{F}_{2N+1}}$ la T.F.D. de l'application $j \longmapsto f(x_j)$. Montrer que :

$$C_N f = \sum_{k=-N}^{N} \varphi_{\check{k}} e_k$$

 où $\check{k}$ est la classe de $k$ modulo $2N+1$.

4. Soit $h \in E_{2N}$, montrer que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} h(x_j).$$

5. a) Pour $f$ et $g$ dans $E$, on note :

$$[f,g] = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N}\overline{f(x_j)}g(x_j).$$

Montrer que si $f$ et $g$ sont dans $E_N$, $[f,g]=(f,g)$.

b) Montrer que pour tout $f$, $g$ dans $E$,

$$[f - C_N f, g] = 0.$$

c) Calculer $[e_n, e_m]$.

6. Soit $f \in H_1$ et $\ell \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(f_{\ell+(2N+1)k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C. et que :

$$C_N(f) = \sum_{\ell\in\mathbb{F}_{2N+1}} C_{N,\ell}(f)e_\ell,$$

$$C_{N,\ell} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{\ell+(2N+1)k}.$$

7. a) Montrer que pour tout $f \in E$, on a :

$$f - C_N f = g_N - C_N g_N \quad \text{avec} \quad g_N = f - P_N f.$$

b) Montrer qu'il existe une constante $K_3 \in ]0,+\infty[$ telle que pour tout $f \in H_1$,

$$\|f - C_N f\|_2 \leqslant \frac{K_3}{N+1}\|f\|_1.$$

8. Pour quelle raison pratique préfère-t-on $C_N$ à $P_N$ ?

## Partie VI

On se donne un entier $M \geqslant 1$ et on désigne par $\omega$ un nombre complexe tel que $\omega^M = 1$. À tout élément $z$ de $\mathcal{E}_M$ ($\mathcal{E}_M$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{F}_M$ dans $\mathbb{C}$), on associe l'élément $\hat{z}$ de $\mathcal{E}_M$ défini par :

$$\hat{z}_\ell = \sum_{k\in\mathbb{F}_M}\omega^{k\ell}z_k$$

et on note $\hat{z} = \text{T.F.D.}(\omega, M)(z)$.

1. En considérant que les $\omega^{k\ell}$ ont été calculés une fois pour toutes, quel est le nombre d'opérations (additions et multiplications) nécessaires pour obtenir $\hat{z}$ en fonction de $z$ ? On notera $S_M$ ce nombre.
2. On suppose que $M$ est pair : $M = 2M_1$. En remarquant que :

$$\hat{z}_\ell = \sum_{k_1\in\mathbb{F}_{M_1}}\omega^{2k_1\ell}z_{2k_1} + \sum_{k_2\in\mathbb{F}_{M_1}}\omega^{(2k_2-1)\ell}z_{2k_2-1},$$

montrer que T.F.D.$(\omega, M)$ peut s'effectuer à l'aide de deux opérations T.F.D.$(\omega^2, M_1)$.

3. On suppose que $M = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $\Sigma_n$ le nombre d'opérations pour effectuer $\mathrm{T.F.D.}(\chi, 2^n)$ où $\chi \in \mathbb{C}$ vérifie $\chi^{(2^n)} = 1$. Montrer que $\Sigma_n \leqslant 2\Sigma_{n-1} + 2^{n+1}$ et en déduire que :
$$\Sigma_n \leqslant 2M \log_2 M$$
(où $\log_2 M = n$ par définition).
4. En supposant que les calculs sont effectués sur un ordinateur faisant $10^8$ opérations par seconde, comparer les temps de calculs correspondant à $S_M$ avec $M = 2^n$ et $\sigma_n$ pour $n = 20, 25$ et $30$. On représentera les résultats sous forme d'un tableau.
5. On suppose plus généralement que $M = PQ$ où $P$ et $Q$ sont deux entiers supérieurs ou égaux à $1$. Montrer que $\mathrm{T.F.D.}(\omega, M)$ peut se faire en $2M(P + Q)$ opérations.
6. Appliquer ce qui précède au calcul de $C_N f$ pour $f \in H_1$.

## Proposition de solution

### Partie I

1. D'après le théorème de Parseval, la série de terme général $(|f_n|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ converge vers

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

2. Soit $(u_n)$ une suite S.A.C.
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{aligned}
\|S_{n+p} - S_n\|_\infty &= \sup \left| \sum_{k=n-p}^{-n-1} u_k e_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k e_k \right| \\
&\leqslant \sup \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k e_k + u_{-k} e_{-k} \right| \\
&\leqslant \sup \left( \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| + |u_{-k}| \right) \\
&\leqslant \sup \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| + |u_{-k}| \right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ reste d'une série convergente.}
\end{aligned}$$

Donc $(S_N)$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ complet, donc converge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ vers un élément $u$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x \longmapsto u_k e_k(x) e_n(x)$ est continue.
Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$|u_k e_k(x) e_{-n}(x)| = |u_k| \text{ S.A.C.}$$

Donc la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k e_k e_n$ converge normalement sur $[-\pi,\pi]$. Par intégration terme à terme d'une série de fonctions,

$$\begin{aligned}
(e_n, u) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k e_k(x) \right) e_{-n}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k \int_{-\pi}^{\pi} e_k(x) e_{-n}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= u_n.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, les coefficients de Fourier de } u \text{ sont les termes de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}.}$

3. D'après la question précédente, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C., $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge, et

$$\operatorname{Im}\left(\frac{u(x)-u(0)}{x}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{S_N(x)-S_N(0)}{x}\right)+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n(n-1)x}.$$

En posant $x=\frac{1}{N}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(\frac{u(\frac{1}{N})-u(0)}{\frac{1}{N}}\right)&=\operatorname{Im}\left(\frac{S_N(\frac{1}{N})-S_N(0)}{\frac{1}{N}}\right)+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n}{N})N}{n(n-1)}\\&=N\left(\operatorname{Im}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{e^{i\frac{n}{N}}-1}{n(n-1)}\right)+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n}{N})}{n(n-1)}\right).\end{aligned}$$

Or,
- $\left|N\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n}{N})}{n(n-1)}\right|\leqslant N\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}=N\sum_{n=N+1}^{+\infty}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=\frac{N}{N}=1$
- $\forall N\geqslant 2$, $\forall n\leqslant N$, $0<\frac{n}{N}\leqslant 1<\frac{\pi}{2}$. Par concavité de $\sin$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi(n-1)N}\leqslant\frac{\sin(\frac{n}{N})}{n(n-1)}$.
  Mais $\lim_{N\to\infty}N\sum_{n=2}^{N}\frac{2}{\pi(n-1)N}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{N}\frac{2}{\pi(n-1)}=+\infty$.
  Donc $\lim_{N\to\infty}\operatorname{Im}\left(\frac{u(\frac{1}{N})-u(0)}{\frac{1}{N}}\right)=+\infty$.

$u$ n'est pas dérivable en $0$.

4. Pour tout $p,q\in\mathbb{N}$,

$$\|\Sigma_{p+q}-\Sigma_p\|_2^2=\|\sum_{n=p+1}^{p+q}\frac{e_n}{n}\|_2^2=\sum_{n=p+1}^{p+q}\frac{1}{n^2}\leqslant\sum_{n=p+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\xrightarrow[p\to\infty]{}0.$$

Donc $\Sigma_N$ est de Cauchy dans $E$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.

5. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$|(e_n,\Sigma_n)-(e_n,\sigma)|^2\leqslant\|\Sigma_N-\sigma\|_2^2\xrightarrow[N\to\infty]{}0$$

Donc

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ (e_k,\sigma)=\begin{cases}0 \text{ si } k\leqslant 0\\ \frac{1}{k}\text{ si } k\geqslant 1\end{cases}$$

D'où,

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ (e_n,(e^{ix}-1)\sigma)=(e_n,u)$$

Donc par injectivité des coefficients de Fourier, $u(x)=(e^{ix}-1)\sigma(x)$.

6. On a

$$\frac{u(x)-u(0)}{x}=\frac{e^{ix}-1}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}i\sigma(0)$$

car $\sigma\in E$, ce qui est contradictoire puisque $u$ n'est pas dérivable en $0$.

$\boxed{E \text{ muni de la norme } \|\cdot\|_2 \text{ n'est donc pas complet.}}$

## Partie II

1. Posons $g = \sum_{n=-N}^{N}(e_n, f)e_n \in E_N$.
   On a
   $$\forall n \in [\![-N, N]\!],\ (g - f, e_n) = (e_n, f) - (e_n, f) = 0.$$
   Donc $g - f \in E^{\perp}$
   Or, pour tout $h \in E_N$,
   $$\|h_f\|_2^2 = \|\underbrace{h - g}_{\in E_N} + \underbrace{g - f}_{\in E^{\perp}}\|_2^2 = \|h - g\|_2^2 + \|g - f\|_2^2$$
   par le théorème de Pythagore.
   $\boxed{\text{Donc } \|h - f\|_2^2 \text{ est minimal lorsque } h = g.}$

2. On a
   $$\begin{aligned} P_N^2 f = P_N(P_N f) &= \sum_{n=-N}^{N}(e_n, \sum_{k=-N}^{N}(e_k, f)e_k) \\ &= \sum_{n=-N}^{N}\sum_{k=-N}^{N}(e_k, f)(e_n, e_k) \\ &= \sum_{n=-N}^{N}(e_k, f) \\ &= P_N f. \end{aligned}$$
   Donc $P_N f$ est un projecteur de $E$ sur $E_N$. Par théorème de Pythagore, pour tout $f \in E$,
   $$\|f\|_2^2 = \|f - P_N f\|_2^2 + \|P_N f\|_2^2.$$
   $\boxed{\text{Donc } P_N \text{ est un projecteur de } E \text{ sur } E_N, \text{ et pour tout } f \in E,\ \|P_N f\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2.}$

3. a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} P_N f(x) &= \sum_{n=-N}^{N}(e_n, f)e_n(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}\,\mathrm{d}y e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-y)}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_N(x - y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)D_N(u)\,\mathrm{d}u \ (u = x-y)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_N(u)\,\mathrm{d}u \text{ car } f \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|P_N f(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)D_N(y)\,\mathrm{d}y\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)|\,|D_N(y)|\,\mathrm{d}y$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)|^2\,\mathrm{d}y}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)|^2\,\mathrm{d}y}$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^1([-\pi,\pi])$).
Or,
— $\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)|^2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|^2\,\mathrm{d}y} = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$ car $f$ est $2\pi$-périodique
— $\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)|^2\,\mathrm{d}y} = \sqrt{2\pi}\|D_N\|_2 = \sqrt{2\pi}\sqrt{2N+1}$
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|P_N f(x)| \leqslant \sqrt{2N+1}\|f\|_2$
Donc $\|P_N f\|_\infty \leqslant \sqrt{2N+1}\|f\|_2$.

Donc $\alpha_N \leqslant \sqrt{2N+1}$.

5. On a

$$\frac{\varepsilon|y|}{\sqrt{\varepsilon+y^2}(\sqrt{\varepsilon+y^2}+|y|)} = \frac{|y|(\sqrt{\varepsilon+y^2}-|y|)}{\sqrt{\varepsilon+y^2}} = |y| - \frac{y^2}{\sqrt{\varepsilon+y^2}}.$$

On a clairement

$$|y| - \frac{y^2}{\sqrt{\varepsilon+y^2}} \geqslant 0$$

et

$$\frac{\varepsilon|y|}{\sqrt{\varepsilon+y^2}(\sqrt{\varepsilon+y^2}+|y|)} \leqslant \sqrt{\varepsilon}.$$

Alors

$$0 \leqslant |D_N(x)| - \frac{D_N^2(x)}{\sqrt{\varepsilon+D_N^2(x)}} \leqslant \sqrt{\varepsilon}.$$

Donc, en intégrant entre $-\pi$ et $\pi$ et en multipliant par $\frac{1}{2\pi}$ l'inégalité,

$$L_N \leqslant \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\psi_N^{\varepsilon^2}(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\varepsilon} + P_N\psi_N^{\varepsilon^2}(0)$$

Or,

$$|P_N\psi_N^{\varepsilon^2}(0)| \leqslant \|P_N\psi_N^{\varepsilon^2}\|_\infty \leqslant \alpha_N$$

car $\|\psi_N^{\varepsilon^2}\|_\infty < 1$.
Donc

$$\forall\varepsilon > 0,\ L_N \leqslant \sqrt{\varepsilon} + \alpha_N.$$

Ainsi, $\alpha_N \geqslant L_N$.

6. Soit $x \in [-\pi, \pi]\backslash\{0\}$. Pour tout $N \in N$,

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin(Nx)\cos(\frac{x}{2}) + \sin(\frac{x}{2})\cos(Nx)}{\sin\frac{x}{2}} \\ &= \sin(Nx)\cot(\frac{x}{2}) + \cos(Nx) \\ &= 2\frac{\sin(Nx)}{x} + \sin(Nx)(\cot(\frac{x}{2}) - \frac{2}{x}) + \cos(Nx) \end{aligned}$$

Or, $\cot(\frac{2}{x}) \sim \frac{2}{x}$, donc $f : x \to \sin(Nx)(\cot(\frac{x}{2}) - \frac{2}{x}) + \cos(Nx)$ est prolongeable par continuité en $0$. $f$ étant continue sur $[-\pi, \pi]$ elle y est bornée indépendamment de $N$ par $M \geqslant 0$.
Alors, par inégalité triangulaire,

$$\left|2\frac{2\sin(Nx)}{x}\right| - M \leqslant |D_N(x)| \leqslant \left|\frac{2\sin(Nx)}{x}\right| + M.$$

Par un changement de variable,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{2\sin(Nx)}{x}\right| \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin u|}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^{N\pi}\left|\frac{\sin u}{u}\right| \mathrm{d}u &= \sum_{k=0}^{N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin u|}{u}\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u + \int_0^{\pi}\frac{|sinu|}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u + \int_0^{\pi}\frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k} + \int_0^{\pi}\frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{4}{\pi}\ln(N). \end{aligned}$$

Et,

$$\int_0^{N\pi}\left|\frac{\sin u}{u}\right| \mathrm{d}u \geqslant \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{4}{\pi}\ln(N)$$

Donc

$$\frac{2}{\pi}\int_0\frac{|\sin u|}{u}\,\mathrm{d}u \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{4}{\pi^2}\ln(N).$$

Ainsi, par encadrement, $L_N \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{4}{\pi^2}\ln(N)$.

7. On a

$$L_N \leqslant \|D_N\|_2.$$

Donc

$$\lim_{N\to\infty} \|D_N\|_2 = +\infty.$$

Donc la norme de la suite d'opérateurs $(P_N)_N$ tend vers l'infini.

## Partie III

1. Soit $f \in E$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a
   — $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2$.
   — $\|f'\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f'_n|^2$.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f'_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\left[f(x)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{pi} + in\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x\right) \text{ intégration par parties} \\ &= \frac{in}{2\pi} f_n \end{aligned}$$

   Donc $\|f'\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 f_n$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 = \|f\|_1^2.}$

   Réciproquement, en considérant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie dans la question I.I.3., $\frac{(1+n^2)}{n^2(n-1)^2} \sim \frac{1}{n^2}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C., mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

   $\boxed{\text{La réciproque est fausse.}}$

2. Soit $f \in E$. $P_N f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap E$. Donc par la question précédente,

$$\|P_N\|_2^2 + \|(P_N f)'\|_2^2 = \|P_N f\|_1^2.$$

   Or,
   $\|P_N f(x)\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |f_n|^2$ et $\|(P_N f)'(x)\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} n^2|f_n|^2$.
   Donc $\|P_N f(x)\|_2^2 + \|(P_N f)'(x)\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N}(1+n^2)|f_n|^2 \underset{N\to\infty}{\to} \|f\|_1^2$.

   Ainsi, $P_N f \xrightarrow[N\to\infty]{\|\cdot\|_1} f$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } E_1 \text{ est dense dans } E \text{ pour la norme } \|\cdot\|_1.}$

3. Soit $f \in H_1$.

$$\|P_N f - f\|_2^2 = \sum_{|n|\geqslant N+1} |f_n|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{|n|>N+1} \frac{(1+n^2)|f_n|^2}{1+n^2} \\
&\leqslant \frac{1}{1+(N+1)^2} \sum_{|n|\geqslant N+1} (1+n^2)|f_n|^2 \\
&\leqslant \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{|n|>N} (1+n^2)|f_n|^2 \\
&= \frac{1}{(N+1)^2} \|f\|_1^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\|P_N f - f\|_2 \leqslant \frac{1}{N+1}\|f\|_1$.

4. Soient $f \in E_1$ et $x, y \in [-\pi, \pi]$. On a

$$f^2(x) = f^2(x) + 2\int_y^x f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors, par l'inégalité triangulaire,

$$|f(x)|^2 \leqslant |f(y)|^2 + 2\int_y^x |f(t)f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant |f(y)|^2 + 2\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

En intégrant par rapport à $y$, et en multipliant par $\frac{1}{2\pi}$

$$|f(x)|^2 \leqslant \|f\|_2^2 + 2\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Or, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 2\pi\|f\|_2\|f'\|_2.$$

Donc

$$|f(x)|^2 \leqslant \|f\|_2^2 + 4\pi\|f\|_2\|f'\|_2 \leqslant 4\pi\|f\|_2(\|f\|_2 + \|f'\|_2).$$

Par convexité de $t \longmapsto t^2$,

$$\|f\|_2 + \|f'\|_2 \leqslant \sqrt{2}(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2)^{1/2} = \sqrt{2}\|f\|_1.$$

Donc

$$|f(x)|^2 \leqslant 4\pi\sqrt{2}\|f\|_1\|f\|_2.$$

D'où, par passage au sup, comme $f$ est $2\pi$-périodique,

$$\|f\|_\infty \leqslant 4\pi\sqrt{2}\|f\|_1^{1/2}\|f\|_2^{1/2}$$

Par densité, de $E_1$ dans $H_1$ et continuité des normes, pour tout $f \in E$,

$$\|f\|_\infty \leqslant 4\pi\sqrt{2}\|f\|_1^{1/2}\|f\|_2^{1/2}.$$

5. Par question précédente,

$$\|P_N f - f\|_\infty \leqslant K_1 \|P_N - f\|_2^{1/2} \|P_N f - f\|_1^{1/2}.$$

Or, par le théorème de Pythagore, $\|P_N f - f\|_2 \leqslant \|f\|_2$ et par question III.2.,

$$\|P_N f - f\|_2 \leqslant \frac{1}{N+1} \|f\|_1.$$

Donc $\|P_N f - f\|_\infty \leqslant \frac{K_1}{\sqrt{N+1}} \|f\|_1$.

$E_1$ est dense dans $H_1$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Les fonctions de $H_1$ peuvent être uniformément approchées par des fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

## Partie IV

1. Soit $f \in H_1$.

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2 \leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)|f_n|^2 = \|f\|_1^2.$$

Ainsi, si $f \in H_1$, $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_1$.

2. Soient $f, g \in H_1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

— $\|f\|_1 \geqslant 0$ par somme de termes positifs ;
— $\|\lambda f\|_1 = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)|(e_n, \lambda f)|^2\right)^{1/2} = \left(|\lambda|^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)|f_n|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \|f\|_1$ ;
— $\|f\|_1 = 0$ si, et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| = 0$ *i.e.* $f = 0$ ;
— Si $f + g = 0$, l'inégalité est clairement vraie. Supposons que $f + g \neq 0$

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_1^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)|f_n + g_n|^2 \\
&\leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)|f_n||f_n+g_n| + \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)|g_n||f_n+g_n| \\
&\leqslant \left( \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2} + \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g_n|^2} \right) \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)|f_n+g_n|^2} \\
&= (\|f\|_2 + \|g\|_2)\|f+g\|_1 \\
&\leqslant (\|f\|_1 + \|g\|_1)\|f+g\|_1 \text{ inégalité de la question précédente}
\end{aligned}$$

Alors $\|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$.

Donc $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $H_1$.

Soit $(f^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant q \geqslant n_0$, $\|f^p - f^q\|_1 \leqslant \varepsilon$
Pour $n_0 \in \mathbb{N}$ ainsi fixé, on a en particulier

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \forall p \geqslant q \geqslant n_0,\ |f_j^p - f_j^q| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$$

Donc à $j$ fixé, $(f_j^p)_p$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$ qui est complet. Donc la suite $(f_j^p)_p$ est convergente dans $\mathbb{C}$ vers un certain $f_j$.
De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=-k}^{k} (1+j^2)|f_j^p - f_j^q|^2 \leqslant \varepsilon.$$

Donc en faisant tendre $q$ vers $+\infty$,

$$\sum_{j=-k}^{k} (1+j^2)|f_j^p - f_j|^2 \leqslant \varepsilon.$$

Par passage à la limite, quand $k \to +\infty$,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} (1+j^2)|f_j^p - f_j|^2 \leqslant \varepsilon.$$

On pose $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e_n$.
Donc $\lim_{p\to\infty} \|f^p - f\|_1 = 0$ donc en particulier, $f - f^p \in H_1$.
D'où $f = (f - f^p) + f^p \in H_1$.

$\boxed{\text{Ainsi, toute suite de Cauchy dans } H_1 \text{ converge dans } H_1 \text{ donc } H_1\text{, donc } H_1 \text{ est complet.}}$

3. D'après III.4., pour tout $f \in H_1$, $\|f\|_\infty \leqslant K_1 \|f\|_2^{1/2} \|f\|_1^{1/2}$.
D'après IV.1., $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_1$. Donc $\|f\|_\infty \leqslant K_1 \|f\|_1$ avec $K_1 \in ]0, +\infty[$.

$\boxed{\text{Ainsi, il existe } K_2 \text{ telle que pour tout } f \in H_1,\ \|f\|_\infty \leqslant K_2 \|f\|_1.}$

4. a) Soit $(g^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $H_1$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|g^p\|_1 \leqslant 1.$$

Comme $\mathbb{Z}$ est dénombrable, notons ses éléments $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme $\|g^p\|_1 \leqslant 1$, en particulier, $|(g^p, e_{a_0})| \leqslant \frac{1}{1+a_0^2}$. Donc la suite $((g^p, e_{a_0}))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi_0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $((g^{\varphi_0(p)}, e_{a_0}))_{p\in\mathbb{N}}$ converge.
Comme la suite $((g^p, e_{a_1}))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, en particulier, $((g^{\varphi_0(p)}, e_{a_1}))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $((g^{\varphi_0(\varphi_1(p))}, e_{a_1}))_{p\in\mathbb{N}}$ converge.
Par récurrence, comme $((g^{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_n(p)}, e_{a_{n+1}}))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi_{n+1} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $((g^{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_{n+1}(p)}, e_{a_{n+1}}))_{p\in\mathbb{N}}$ soit convergente.
Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\psi(n) = \varphi_0 \circ \ldots \varphi_n(n)$.
$\psi(n+1) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1))$. Or $\varphi_{n+1}(n+1) \geqslant n+1 > n$. Donc $\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1)) > \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n) = \psi(n)$. Donc $\psi$ est strictement croissante, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $((g^{\psi(p)}, e_n))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente.

$\boxed{\text{Ainsi, il existe une application strictement croissante } \psi \text{ de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{N} \text{ telle que pour tout } n \in \mathbb{Z}, \text{ la suite } ((g^{\psi(p)}, e_n))_{p\in\mathbb{N}} \text{ soit convergente.}}$

b) Par passage à la limite, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|\ell_n| \leqslant \frac{1}{1+n^2}$. Donc $(\ell_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C.

$\boxed{\text{D'après I.2., } S_N \text{ converge vers un élément } \ell \in E \text{ pour la norme } \|\cdot\|_\infty.}$

c) Par unicité de la limite, $\ell = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ell_n e_n$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e_n, \ell) = \ell_n$, et $(1+n^2)|\ell_n|^2 \leqslant \frac{1}{1+n^2}$, terme général d'une série convergente. Donc $((1+n^2)|\ell_n|^2)$ est une S.A.C.

$\boxed{\text{Ainsi, } \ell \in H_1.}$

d) Posons, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$g_n^p = \begin{cases} \frac{1}{4(1+n^2p^2)} & \text{si } p \neq n \\ \frac{1}{4(1+n^2p^2)} + \frac{1}{4\sqrt{1+p^2}} & \text{si } p = n. \end{cases}$$

La série de terme général $(g_n^p e_n)$ est normalement convergente, donc $g^p = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n^p$ est bien défini.
De plus, $(1+n^2)|g_n^p|^2$ est le terme général d'une série convergente, et

$$\|g^p\|_1^2 = \frac{1}{4}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1+n^2}{(1+n^2p^2)^2} + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{4} \leqslant 1.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ell_n = \lim_{p\to+\infty} g_n^p = 0.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|g^p - \ell\|_1^2 = \frac{1}{4}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1+n^2}{(1+n^2p^2)^2} + 1\right).$$

Or, par le théorème de convergence dominé,

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1+n^2}{(1+n^2p^2)^2} = 0.$$

Donc

$$\lim_{p\to\infty} \|g^p - \ell\|_1 = \frac{1}{4}.$$

## Partie V

1. Notons $A = (e^{ilx_j})_{0\leqslant l,j\leqslant 2N}$ et $B = (\frac{1}{2N+1}e^{-ilx_j})_{0\leqslant l,j\leqslant 2N}$.
   Soit $a, b \in \mathbb{F}_{2N+1}$.

$$\begin{aligned}[AB]_{a,b} &= \sum_{k=0} 2N A_{a,k} B_{k,b} \\ &= \sum_{k=0} 2N e^{iax_k} e^{-kx_b}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2N+1} \sum_{k=0} 2N e^{i\frac{2\pi}{2N+1}k(a-b)}$$
$$= \begin{cases} 1 \text{ si } a = b \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On montre de même que $[BA]_{a,b} = \delta_{a,b}$

Ainsi, la matrice carrée d'ordre $2N + 1$ $(e^{ilx_j})_{0\leqslant l,j\leqslant 2N}$ a pour inverse $(\frac{1}{2N+1}e^{-ilx_j})_{0\leqslant j\leqslant 2N, 0\leqslant \ell\leqslant 2N}$.

2. a) Soit $f \in E$.

Notons $F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$

Pour tout $\ell \in [\![0, 2N]\!]$,

$$[BF]_\ell = \sum_{j=0}^{2N} B_{\ell,j}F_j = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=0}^{2N} e^{-i\ell x_j} f(x_j) = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} e^{-i\ell x_j} f(x_j)$$

car $f$ est $2\pi$-périodique.

Donc

$$\begin{aligned}[ABF]_k &= \sum_{\ell=0}^{2N} A_{k,l}[BF]_\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{2N} e^{ikx_\ell} \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} e^{-i\ell x_j} f(x_j) \\ &= \sum_{\ell=-N}^{N} e^{i\ell x_k} \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} e^{-i\ell x_j} f(x_j).\end{aligned}$$

Or $AB = I_{2N+1}$.

Donc

$$\forall k \in F_{2N+1},\ [ABF]_k = F_k,$$

*i.e.*

$$\forall k \in F_{2N+1},\ f(x_k) = \sum_{\ell=-N}^{N} e^{i\ell x_k} \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} e^{-i\ell x_j} f(x_j).$$

Posons $C_N f = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} f(x_j)e^{-i\ell x_j}e_\ell \in E_N$.

Pour tout $j \in \mathbb{F}_{2N+1}$,

$$C_N f(x_j) = \frac{1}{2N+1}\sum_{a=-N} N f(x_a) \sum_{b=-N} N e^{ib(x_a - x_j)} = f(x_j).$$

Soient $C_N$ et $C'_N$ vérifiant pour tout $j \in \mathbb{F}_{2N+1}$, $C_N f(x_j) = C'_N(x_j)$. Alors pour tout $j \in \mathbb{F}_{2N+1}$, $C_N - C'_N(x_j) = 0$. Or, $C_N - C'_N$ est un polynôme trigonométrique de degré inférieur à $2N$ ayant $2N+1$ racine. Donc $C_N = C'_N$.

Ainsi, il existe un unique élément de $E_N$ noté $C_N(f)$ tel que $\forall j \in \mathbb{F}_{2N+1}$, $(C_N f)(x_j) = f(x_j)$.

b) Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $j \in \mathbb{F}_{2N+1}$

$$(C_N(f + \lambda g))(x_j) = (f + \lambda g)(x_j) = f(x_j) + \lambda g(x_j) = C_N f(x_j) + \lambda C_N(g)(x_j)$$

Donc

$$C_N(f + \lambda g) = C_N f + \lambda C_N g$$

c) Par définition, $C_N(e_{2N+1}) \in E_N$. Donc

$$C_N(e_{2N+1}) = \sum_{j=-N}^{N} (e_j, C_N(e_{2N+1})).$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{F}_{2N+1}$,

$$(e_k, C_N(e_{2N+1})) = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} e^{-ikx_j} = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Donc $C_N(e_{2N+1}) = e_0$. Mais $P_N(e_{2N+1}) = 0$.

Donc $C_N \neq P_N$.

3. a) Soit $\ell \in \mathbb{Z}$. Par définition de $\hat{z}$, $\hat{z}$ ne dépend que de $\ell$.

Or,

$$\hat{z}_{\ell+2N+1} = \frac{1}{2N+1} \sum_{k \in \mathbb{F}_{2N+1}} e^{-i(\ell+2N+1)x_k} z_k = \frac{1}{2N+1} \sum_{k \in \mathbb{F}_{2N+1}} e^{-i\ell x_k} z_k = \hat{z}_\ell.$$

Ainsi, $\hat{z}_\ell$ ne dépend que de la classe de $\ell$ modulo $2N + 1$.

b) On a, d'après V.2. :

$$\begin{aligned} C_N f &= \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} \sum_{\ell=-N}^{N} f(x_j) e^{-i\ell x_j} e_\ell \\ &= \sum_{\ell=-N}^{N} \left( \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} \underbrace{f(x_j)}_{\varphi_{\check{j}}} e^{-i\ell x_j} \right) e_\ell \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \varphi_{\hat{k}} e_k. \end{aligned}$$

Ainsi, $C_N f = \sum_{k=-N}^{N} \varphi_{\hat{k}} e_k$.

4. Soit $h \in E_{2N}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} h(x_j) &= \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N}\sum_{\ell=-N}^{N}(e_\ell, h)e_\ell(x_j) \\
&= \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N}\sum_{\ell=-N}^{N}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)e^{-i2\pi\ell x_j}\,\mathrm{d}x\right]e^{2i\pi\ell x_j} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N}\sum_{\ell=-N}^{N} h(x)\underbrace{e^{2i\pi\ell(x_j-x)}}_{=0 \text{ si } \ell\neq 0}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} h(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $h \in E_{2N}$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} h(x_j)$.

5. a) Soient $f$ et $g$ dans $E$. Alors $f\overline{g} \in E_{2N}$. Donc d'après la question précédente,

$$[f,g] = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} h(x_j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,\mathrm{d}x = (f,g).$$

Ainsi, pour tous $f, g \in E_N$, $[f,g] = (f,g)$.

b) Soient $f, g \in E$.

$$[f - C_N f, g] = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N}\underbrace{(f(x_j) - C_N f(x_j))}_{=0}g(x_j) = 0.$$

Ainsi, pour tous $f, g \in E$, $[f - C_N f, g] = 0$.

c) Soit $m, n \in \mathbb{Z}$.

$$[e_n, e_m] = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} e^{\frac{2i\pi}{2N+1}(m-n)j} = \begin{cases} 1 \text{ si } m = n[2N+1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

6. Soit $f \in H_1$. Soit $\ell \in \mathbb{Z}$.

$$\sum_{n\in Z}|f_n| = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\sqrt{1+n^2}}{\sqrt{1+n^2}}|f_n| \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)|f_n|^2\right)^{1/2} < +\infty$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et hypothèse sur $f$.
Donc en particulier, la suite extraite $(f_{\ell+(2N+1)k)})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C.

On a

$$C_N(f) = \sum_{\ell=-N}^{N} \left[ \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} f(x_j) e^{-i\ell x_j} \right] e_\ell.$$

Or, pour tout $\ell \in \mathbb{F}_{2N+1}$,

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} f(x_j) e^{-i\ell x_j} = [e_\ell, f] = [e_\ell, C_N f].$$

Avec

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (e_n, f) e_n = \sum_{\ell=-N}^{N} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (e_{\ell+(2N+1)k}, f) e_{\ell+(2N+1)k},$$

par linéarité de $C_N$,

$$C_N f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (e_{\ell+(2N+1)k}, f) C_N(e_{\ell+(2N+1)k}).$$

Or, pour tous $\ell \in \mathbb{F}_{2N+1}$, $k \in \mathbb{Z}$, $C_N(e_{\ell+(2N+1)k}) = e_\ell$.
Donc $C_N f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (e_{\ell+(2N+1)k}, f) e_\ell$.
Par linéarité à droite de $[\cdot,\cdot]$, pour tout $j \in \mathbb{F}_{2N+1}$,

$$[e_j, C_N f] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (e_{\ell+(2N+1)k}, f)[e_j, e_\ell] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (e_{j+(2N+1)k}, f).$$

Donc pour tout $\ell \in \mathbb{F}_{2N+1}$,

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} f(x_j) e^{-i\ell x_j} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (e_{\ell+(2N+1)k}, f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{\ell+(2N+1)k} = C_{N,\ell}(f).$$

$\boxed{\text{Ainsi, } C_N(f) = \sum_{\ell\in\mathbb{F}_{2N+1}} C_{N,\ell}(f) e_\ell.}$

7. a) Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned} C_N(P_N f) &= \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} \sum_{\ell=-N}^{N} P_N f(x_j) e^{-i\ell x_j} e_\ell \\ &= \sum_{\ell=-N}^{N} \left[ \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} P_N f(x_j) e^{-i\ell x_j} \right] e_\ell \\ &= \sum_{\ell=-N}^{N} [e_\ell, P_N f] e_\ell. \end{aligned}$$

Or $P_N f$ et $e_\ell$ sont des éléments de $E_N$. D'après V.5.a),

$$[e_\ell, P_N f] = (e_\ell, P_N f) = (e_\ell, f).$$

Donc $C_N(P_N f) = \sum_{\ell=-N}^{N} (e_\ell, P_N f) e_\ell = P_N f$.

$$f - C_N f = f - P_N f + P_N f - C_N f = g_N + C_N P_N f - C_N f = g_N - C_N g_N.$$

Ainsi, $f - C_N f = g_N - C_N g_N$.

b) D'après la question précédente,

$$\|f - C_N f\|_2^2 = \|g_N - C_N g_N\|_2^2.$$

Or, $g_N \in E_N^{\perp}$ et $C_N g_N \in E_N$.
Donc

$$\|g_N - C_N g_N\|_2^2 = \|g_N\|_2^2 + \|C_N g_N\|_2^2$$

et

$$\begin{aligned}\|C_N g_N\|_2^2 &= (C_N g_N, C_N g_N)\\ &= [C_N g_N, C_N g_N]\\ &= \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} C_N g_N(x_j)\overline{C_N g_N(x_j)}\\ &= \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} g_N(x_j)\overline{g_N(x_j}\\ \|g_N\|_2^2.\end{aligned}$$

Or, d'après la question III.3.,

$$\|g_N\|_2^2 \leqslant \frac{K_1}{N+1}\|f\|_1.$$

Ainsi, $\|f - C_N f\|_2 \leqslant \frac{2K_1}{N+1}\|f\|_1$.

8. Le calcul de $C_N$ requiert des évaluations en un certain nombre de points tandis que celui de $P_N$ nécessite de connaître la valeur des intégrales, ce qui est plus pénible.

## Partie VI

1. Soit $\ell \in \mathbb{F}_M$. Pour calculer $\hat{z}_\ell$, il faut $2M+1$ multiplications. La somme ayant $(2M+1)$ termes, il faut $2M$ additions, soit $4M+1$ opérations.

$\hat{z}$ étant entièrement définie par le calcul de tous les $\hat{z}_\ell$, le calcul de $\hat{z}$ nécessite $(4M+1)(2M+1)$ opérations.

2. Supposons que $M = 2M_1$. Il est clair que

$$\hat{z}_\ell = \sum_{k_1 \in \mathbb{F}_{M1}} \omega^{2k_1\ell} z_{2k_1} + \sum_{k_2 \in \mathbb{F}_{M_1}} \omega^{(2k_2-1)\ell} z_{2k_2-1}$$

Posons $x : \begin{array}{ccc}\mathbb{F}_{M_1} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ k & \longmapsto & z_{2k}\end{array}$ et $y : \begin{array}{ccc}\mathbb{F}_{M_1} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ k & \longmapsto & \omega^{-\ell} z_{2k-1}\end{array}$

Alors

$$\hat{z} = \text{T.F.D.}(\omega^2, M_1)(x) + \text{T.F.D.}(\omega^2, M_1)(y).$$

Ainsi, T.F.D.$(\omega^2, M_1)$ peut s'effectuer à l'aide de deux opérations T.F.D.$(\omega^2, M_1)$.

3. On suppose que $M = 2^n$

   Notons $\hat{z} = \text{T.F.D.}(\chi, 2^n)(z)$. D'après ce qui précède,

$$\hat{z}_\ell = \sum_{k_1 \in \mathbb{F}_{M1}} \chi^{2k_1\ell} z_{2k_1} + \frac{1}{\chi^\ell} \sum_{k_2 \in \mathbb{F}_{M_1}} \chi^{(2k_2)\ell} z_{2k_2-1}.$$

   Le calcul de $\hat{z}_\ell$ peut s'effectuer à l'aide de deux $\text{T.F.D.}(\chi^2, 2^{n-1})$ et une multiplication. Comme pour $\hat{z}_0$, la multiplication n'est pas nécessaire, on pourra effectuer $2^n - (-2^n) = 2^{n+1}$ multiplications supplémentaires pour calculer $\hat{z}$.

   Ainsi, $\Sigma_n \leqslant 2\Sigma_{n-1} + 2^{n+1}$.

   Par récurrence immédiate, $\Sigma_n \leqslant 2^n \Sigma_0 + n2^{n+1}$.

   Pour $M = 1$, il n'y a pas de calcul à faire, donc $\Sigma_0 = 0$.

   Ainsi, $\Sigma_n \leqslant 2M \log_2(M)$

4.

| $n$ | temps $S_M$ | temps de $\Sigma_n$ |
|---|---|---|
| 20 | $8,80.10^4$ | $4,19.10^7$ |
| 25 | $9,01.10^7$ | $1,68.10^9$ |
| 30 | $9,22.10^{18}$ | $6,44.10^{10}$ |

5. Soient $p \in \mathbb{N}$ tel que $2^{p-1} \leqslant PQ \leqslant 2^p$. On peut majorer le nombre d'opérations par $2.2^p p$.
6. On considère $M$ défini comme dans la question précédente. Le calcul de $C_M f$ nécessite d'effectuer la transformée de Fourier discrète de $f$ que l'on peut faire en $2M(P+Q)$ opérations. À cela s'ajoutent les opérations élémentaires, soit $2M + 1$ multiplications et $2M$ additions. Donc le calcul de $C_M f$ nécessite $2M(P + Q + 2) + 1$ opérations.